

SÉRIE A, N° 2536

N° D'ORDRE :

3.408

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Georges HEILBRONN

- 1^{re} Thèse : Intégration des équations aux dérivées partielles
du second ordre par la méthode de Drach
- 2^e Thèse : Propositions données par la Faculté

Soutenues le 19 MARS 1953 devant la Commission d'examen

MM. H. VILLAT

Président

R. GARNIER

J. PÈRES

} *Examineurs*

FACULTE DES SCIENCES

Nom du Candidat : **HEILBRONN.**

Prénom : **Georges.**

Date de soutenance :

19 MARS 1953

Numéro d'ordre : Série A 2536 — N° 3408.

(Ces deux mentions seront complétées par le Service de la Bibliothèque).

HEILBRONN (Georges). — Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de DRACH. — Paris, ronéotypé, 1953. In-4°, 114 p.

Th. Sc. Math. Paris, 1953.
Ser. A. 2536. N° 3408.

HEILBRONN (Georges). — Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de DRACH. — Paris, ronéotypé, 1953. In-4°, 114 p.

Th. Sc. Math. Paris, 1953.
Ser. A. 2536. N° 3408.

HEILBRONN (Georges). — Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de DRACH. — Paris, ronéotypé, 1953. In-4°, 114 p.

Th. Sc. Math. Paris, 1953.
Ser. A. 2536. N° 3408.

HEILBRONN (Georges). — Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de DRACH. — Paris, ronéotypé, 1953. In-4°, 114 p.

Th. Sc. Math. Paris, 1953.
Ser. A. 2536. N° 3408.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552427_0035

SÉRIE A, N° 2536

N° D'ORDRE :

3.408

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Georges HEILBRONN

1^{re} Thèse : Intégration des équations aux dérivées partielles
du second ordre par la méthode de Drach

2^e Thèse : Propositions données par la Faculté

Soutenues le **19 MARS 1953** devant la Commission d'examen

MM. H. VILLAT

Président

R. GARNIER

J. PERÉS

} *Examineurs*

INTRODUCTION

Le but du présent travail est l'application de la méthode de J. DRACH, telle qu'elle est exposée dans les actes du Congrès de Bologne (1), et dans une note publiée dans les Comptes-rendus de l'Académie des Sciences (2) à l'étude des équations aux dérivées partielles du 2d ordre de la forme

$$s = f(x, y, z, p, q, r)$$

à deux variables indépendantes x et y , où les dérivées de la fonction z sont désignées par les notations habituelles: p, q, r, s, t (3).

La méthode de DRACH se situe comme le développement logique de la méthode d'AMPERE, dans la direction même que celui-ci envisageait. La généralisation de la méthode d'AMPERE, due à DARBOUX, malgré les succès obtenus par lui-même et ses successeurs, comporte une limitation intrinsèque. Elle masque la portée véritable de la méthode d'AMPERE, dont la puissance a été révélée par les travaux de DRACH.

La lecture des mémoires originaux de DRACH semble difficile; c'est la seule raison pour laquelle son oeuvre n'a pas atteint la notoriété qu'elle mérite. C'est pourquoi nous avons cru faire un travail utile en reprenant dans une première partie, l'exposé de sa méthode et des principaux résultats auxquels il était parvenu. Cela contribuera, nous l'espérons, à rendre accessibles à un public mathématique très large, des théories qui sont loin d'avoir épuisé leur fécondité.

Il convient de souligner que la méthode de résolution des équations aux dérivées partielles, que nous utilisons ici, ne représente qu'une faible partie des découvertes de DRACH, dont l'oeuvre s'est poursuivie dans un

(1) Atti del Congresso dei Matematici, BOLOGNA 1928-VI p.11-25

(2) Comptes-Rendus 208, 1939, p.1181 - 1185.

(3) Nous verrons plus loin des notations plus logiques.

développement harmonieux, tout au long de sa vie. On trouve dans sa thèse (1) les idées de base qu'il a su appliquer, par la méthode d'"intégration logique", avec le même succès, aux équations différentielles ordinaires et aux équations aux dérivées partielles. C'est le nombre considérable d'applications possibles de ces dernières qui nous a fait donner la priorité, contre tout ordre logique et chronologique, à la fin de son oeuvre. Nous réservons à un autre travail l'exposé des questions relatives aux équations différentielles ordinaires.

Je tiens à remercier M. VILLAT, dont les encouragements précieux m'ont seuls permis de mener à bien ce travail. Son indulgence lui a même fait accueillir cette modeste ébauche dans la célèbre collection, qu'il a fondée et qu'il dirige avec tant de succès : le Mémorial des Sciences Mathématiques. Qu'il veuille bien trouver ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Ma gratitude et mes remerciements vont aussi à MM. GARNIER et PERES, qui ont bien voulu témoigner quelque intérêt à ce travail.

Après de si longue années d'éloignement de la Faculté des Sciences, j'ai eu l'heureuse surprise de n'avoir pas été oublié de M. GARNIER et je me permets de lui exprimer toute ma reconnaissance pour la sympathie qu'il a montrée à un de ces anciens étudiants de licence

Enfin, tout en heurtant sa modestie, et en enfreignant son veto, il faut que je mentionne ici avec reconnaissance le nom de mon ami J. KRAVTCHENKO: mes entretiens avec lui ont éclairé bien des points qui étaient restés obscurs dans la pensée si profonde de DRACH.

Il faut néanmoins consacrer ce travail à celui à qui il doit d'exister: c'est le pieux hommage de son seul disciple à la mémoire d'un grand homme.

(1) J. DRACH. Thèse, PARIS 1898.

C H A P I T R E I

A) GENERALITES SUR LES EQUATIONS DU 2d ORDRE -

§1 - Caractéristiques du 2d ordre.

1.- Soit l'équation : (1) $f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$

dans laquelle z est fonction des deux variables indépendantes x et y ,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad \text{et où}$$

f est analytique pour toutes les variables.

Si $z = \int (x, y)$ est une intégrale de l'équation (1), elle est aussi l'équation d'une surface dite surface intégrale.

Les courbes caractéristiques, d'après CAUCHY, sont les courbes tracées sur les surfaces intégrales, le long desquelles les dérivées du 3ème ordre ne sont pas déterminées par les différentielles dx, dy, dr, ds, dt , les différentielles dz, dp, dq se calculant par les relations connues :

$$dz = p dx + q dy, \quad dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy$$

CAUCHY se pose le problème suivant : Etant donnée une équation (1), déterminer une surface intégrale passant par une courbe donnée C et tangente le long de cette courbe à une surface développable donnée D . Le long de C , x, y, z, p, q , sont des fonctions d'un paramètre θ : r, s, t satisfont à (1) et à

$$(2) \quad \begin{cases} g = r dx + s dy - dp = 0 \\ h = s dx + t dy - dq = 0 \end{cases}$$

les différentielles étant prises par rapport à θ .

(1) et (2) forment un système de trois équations à trois inconnues, r, s, t . Ce système admet une solution unique, si le déterminant

$$\frac{D(f, g, h)}{D(r, s, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} \neq 0$$

2.- Sans nous préoccuper de montrer que le problème de CAUCHY se résoud alors facilement, étudions le cas où l'équation

$$(3) \frac{D(f,g,h)}{D(r,s,t)} = \frac{\partial f}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial f}{\partial s} dx dy + \frac{\partial f}{\partial t} dx^2 = 0$$

est vérifiée. Les courbes caractéristiques que nous allons définir à partir de l'équation (3) permettent d'ailleurs d'engendrer les surfaces intégrales et, par suite de résoudre le problème de CAUCHY.

Le long d'une courbe C, où $\frac{dy}{dx}$ est solution de l'équation (3), les huit fonctions x, y, z, p, q, r, s, t , satisfont aux 5 relations suivantes :

$$(4) \begin{cases} f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial f}{\partial s} dx dy + \frac{\partial f}{\partial t} dx^2 = 0 \\ p dx + q dy - dz = 0 \\ r dx + s dy - dp = 0 \\ s dx + t dy - dq = 0 \end{cases}$$

où les huit fonctions sont fonctions d'un seul paramètre u .

Cherchons à calculer les dérivées du 3ème ordre

$$A = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \quad B = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \quad C = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \quad D = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

Différentions l'équation (1) successivement par rapport à x et y , il vient :

$$(5) \left[\frac{df}{dx} \right] = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} r + \frac{\partial f}{\partial q} s + \frac{\partial f}{\partial r} A + \frac{\partial f}{\partial s} B + \frac{\partial f}{\partial t} C = 0$$

$$(6) \left[\frac{df}{dy} \right] = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p} s + \frac{\partial f}{\partial q} t + \frac{\partial f}{\partial r} B + \frac{\partial f}{\partial s} C + \frac{\partial f}{\partial t} D = 0$$

Nous poserons pour abréger, également :

$$\left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} r + \frac{\partial f}{\partial q} s$$

$$\left(\frac{df}{dy} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p} s + \frac{\partial f}{\partial q} t$$

Pour calculer A, B, C, D, nous devons ajouter aux équations (5) et (6) les relations suivantes :

$$(7) \quad A dx + B dy - dr = 0$$

$$(8) \quad B dx + C dy - ds = 0$$

$$(9) \quad C dx + D dy - dt = 0$$

On a donc cinq équations pour déterminer les quatre fonctions inconnues A, B, C, D. Mais le tableau des coefficients :

$$(10) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & dx & dy & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} \quad \text{est de rang 3, si l'équation (3) est vérifiée.}$$

Pour que le système soit indéterminé, il faut que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$(11) \quad \begin{vmatrix} \left(\frac{dt}{dx}\right) & \frac{\partial t}{\partial s} & \frac{\partial t}{\partial t} & 0 \\ -dr & dy & 0 & 0 \\ -ds & dx & dy & 0 \\ -dt & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0 \quad (12) \quad \begin{vmatrix} 0 & \left(\frac{dt}{dy}\right) & \frac{\partial t}{\partial s} & \frac{\partial t}{\partial t} \\ dx & -dr & 0 & 0 \\ 0 & -ds & dy & 0 \\ 0 & -dt & dx & dy \end{vmatrix} = 0$$

Les conditions (11) et (12) s'écrivent, après développement et simplification obtenue en remplaçant $\frac{\partial f}{\partial s}$ par

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial r} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial t} dx^2}{dx dy}, \text{ valeur donnée par (3) :}$$

$$(11') \quad \left(\frac{df}{dx}\right) dx dy + \frac{\partial f}{\partial r} dr dy + \frac{\partial f}{\partial t} ds dx = 0$$

$$(12') \quad \left(\frac{df}{dy}\right) dx dy + \frac{\partial f}{\partial r} ds dy + \frac{\partial f}{\partial t} dt dx = 0$$

Une multiplicité caractéristique satisfait aux relations que nous venons d'obtenir (1), (4), (10).

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial f}{\partial s} dx dy + \frac{\partial f}{\partial t} dx^2 = 0 \\ p dx + q dy - dz = 0 \\ r dx + s dy - dp = 0 \\ s dx + t dy - dq = 0 \\ \left(\frac{df}{dx} \right) dx dy + \frac{\partial f}{\partial r} dy dr + \frac{\partial f}{\partial t} dx ds = 0 \end{array} \right.$$

L'équation (3) est du 2d degré en $\frac{dy}{dx}$, elle admet donc deux racines λ_1, λ_2 , auxquelles correspondent deux systèmes de caractéristiques. En divisant par dy, la dernière équation (13) peut prendre l'une ou l'autre des deux formes suivantes (pour le système correspondant à la racine λ_1) :

$$\left(\frac{df}{dx} \right) dx + \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial f}{\partial t} ds = 0$$

$$\left(\frac{df}{dx} \right) dx + \frac{\partial f}{\partial r} (dr + \lambda_2 ds) = 0$$

Remarque.— On peut supprimer dans les équations (13), l'équation (12), en remarquant que la relation (11), divisée par dy, ajoutée à la relation (12) divisée par dx, se réduit à :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} (p dx + q dy) + \frac{\partial f}{\partial p} (r dx + s dy) + \frac{\partial f}{\partial q} (s dx + t dy) + \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial s} ds + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

On obtient donc en définitive, un système (13) de six équations entre huit variables. La solution dépend donc d'une fonction arbitraire.

3.— Nous avons supposé, pour établir le système (13), que les dérivées $\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t}$ étaient différentes de zéro.

Si $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial s}$ sont différentes de zéro, $\frac{\partial f}{\partial t}$ étant nulle, en prenant les déterminants convenables déduits du tableau (10), on obtient immédiatement les équations des deux systèmes de caractéristiques, l'équation (3) se décomposant en :

$$dy = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r} dy - \frac{\partial f}{\partial s} dx = 0$$

Equations du 1er système : $f = 0$

(14)

$$\frac{\partial f}{\partial r} dy - \frac{\partial f}{\partial s} dx = 0$$

$$pdx + qdy - dz = 0$$

$$rdx + sdy - dp = 0$$

$$sdx + tdy - dq = 0$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right) dx + \frac{\partial f}{\partial r} dr = 0$$

Equations du 2ème système

(15)

$$f = 0$$

$$dy = 0$$

$$pdx - dz = 0$$

$$rdx - dp = 0$$

$$sdx - dq = 0$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right) dx + \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial s} ds = 0$$

Comme dans le cas général, on peut remplacer la dernière équation (14) par : $\left(\frac{df}{dy}\right) dx + \frac{\partial f}{\partial r} ds = 0$

et la dernière équation (15) par : $\left(\frac{df}{dy}\right) dx + \frac{\partial f}{\partial r} ds + \frac{\partial f}{\partial s} dt = 0$

Si $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}$ sont simultanément nulles, l'équation (3) se décompose en $dx = 0$, $dy = 0$, et on obtient les équations suivantes pour les deux systèmes de caractéristiques :

(16)

$$f = 0$$

$$dx = 0$$

$$qdy - dz = 0$$

$$sdy - dp = 0$$

$$tdy - dq = 0$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right) dy + \frac{\partial f}{\partial s} dr = 0$$

(17)

$$f = 0$$

$$dy = 0$$

$$pdx - dz = 0$$

$$rdx - dp = 0$$

$$sdx - dq = 0$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right) dx + \frac{\partial f}{\partial s} ds = 0$$

les dernières équations (16) et (17) pouvant être remplacées respectivement par :

$$\left(\frac{df}{dy}\right) dy + \frac{\partial f}{\partial s} ds = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{df}{dy}\right) dx + \frac{\partial f}{\partial s} dt = 0$$

§ 2 .- Caractéristiques du 1er ordre. (1)

4.- Pour certains types d'équations, il se peut que les trois premières équations (13), compte tenu des deux dernières, se réduisent au 1er ordre, c'est-à-dire ne dépendent que de x, y, z, p, q et de leurs différentielles. De telles équations admettent des caractéristiques du 1er ordre. Dans ce cas, l'indétermination pour les dérivées du 3ème ordre, vue au paragraphe précédent, se rencontre dès le 2d ordre.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation $f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ admette des caractéristiques du 1er ordre est donc que le système :

$$(18) \quad \begin{cases} f = 0 \\ rdx + sdy - dp = 0 \\ sdx + tdy - dq = 0 \end{cases}$$

où on considère r, s, t comme inconnues, soit indéterminé.

Tirant, par exemple, r et t des deux dernières équations et portant ces valeurs dans la première, celle-ci doit se réduire à une identité. En considérant r, s, t comme des coordonnées courantes, on obtient facilement une interprétation géométrique de ce résultat. Les deux dernières équations (18) représentent une droite parallèle à une génératrice du cône d'équation (19) $rt - s^2 = 0$

D'où les différents cas possibles :

1°) l'équation (1) représente un plan dont nous écrirons l'équation :

$$(20) \quad r + (\lambda_1 + \lambda_2) s + \lambda_1 \lambda_2 t + M = 0$$

où λ_1, λ_2, M sont des fonctions de x, y, z, p, q .

L'équation (3) s'écrit :

$$(21) \quad dy^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) dx dy + \lambda_1 \lambda_2 dx^2 = 0$$

Les deux systèmes de caractéristiques, qui sont du 1er ordre, sont donc définis par : $dy - \lambda_1 dx = 0, dy - \lambda_2 dx = 0$

(1) Elles sont connues de ceux qui s'intéressent à l'intégration graphique des équations du type hyperbolique, sous le nom de caractéristiques du 2d ordre de MONGE.

Pour former les équations de ces deux systèmes, il suffit d'écrire que les trois plans :

$$r + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1 \lambda_2 t + M = 0$$

$$dp - rdx - sdy = 0$$

$$dq - sdx - tdy = 0$$

forment un faisceau linéaire, c'est-à-dire que les deux déterminants suivants sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 \lambda_2 \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0 \text{ ce qui redonne l'équation (21)}$$

et

$$\begin{vmatrix} -M & \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 \lambda_2 \\ dp & dy & 0 \\ dq & dx & dy \end{vmatrix} = 0 \text{ qui s'écrit :}$$

$$-Mdy^2 + \lambda_1 \lambda_2 dpdx - (\lambda_1 + \lambda_2)dpdy - \lambda_1 \lambda_2 dqdy = 0$$

En remplaçant dy successivement par $\lambda_1 dx$ et $\lambda_2 dx$, on obtient les équations des deux systèmes :

1er système :

$$(22) \quad \begin{cases} dy - \lambda_1 dx = 0 \\ dp + \lambda_2 dq + Mdx = 0 \\ dz - pdx - qdy = 0 \end{cases}$$

2ème système :

$$(22') \quad \begin{cases} dy - \lambda_2 dx = 0 \\ dp + \lambda_1 dq + Mdx = 0 \\ dz - pdx - qdy = 0 \end{cases}$$

2°) L'équation (1) représente une quadrique admettant le cône (19) pour cône asymptote. Les deux systèmes de caractéristiques sont du 1er ordre. Ces équations sont dites de MONGE-AMPERE; nous les écrirons sous la forme :

$$(23) \quad (r-A)(t-D) - (s-B)(s-C) = 0$$

A, B, C, D étant des fonctions de x, y, z, p, q et où l'on a mis les génératrices rectilignes en évidence.

Pour définir les caractéristiques, il suffit d'écrire que la droite :

$$(24) \quad \begin{cases} dp - rdx - sdy = 0 \\ dq - sdx - tdy = 0 \end{cases}$$

est une génératrice de la quadrique (23). En prenant les deux systèmes de génératrices, on obtient les deux systèmes de caractéristiques.

Les génératrices s'écrivent :

$$(25) \quad \begin{cases} r-A = \lambda (s-B) \\ s-C = \lambda (t-D) \end{cases}$$

$$(25') \quad \begin{cases} r-A = \mu (s-C) \\ s-B = \mu (t-D) \end{cases}$$

En identifiant successivement (25) et (25') à (24), on obtient :

$$(26) \quad \begin{cases} dp = A dx + B dy \\ dq = C dx + D dy \\ dz = p dx + q dy \end{cases}$$

$$(26') \quad \begin{cases} dp = A dx + C dy \\ dq = B dx + D dy \\ dz = p dx + q dy \end{cases}$$

auxquelles on a adjoint la relation : $dz = p dx + q dy$.

3°) L'équation (1) représente une surface développable, admettant le cône (19) pour cône directeur. Les deux systèmes de caractéristiques sont confondus en un seul, qui est du 1er ordre.

Soient :

$$(27) \quad \begin{cases} r + 2ms + t \varphi(m, x, y, z, p, q) + \psi(m, x, y, z, p, q) = 0 \\ 2s + t \frac{\partial \varphi}{\partial m} + \frac{\partial \psi}{\partial m} = 0 \end{cases}$$

les équations des génératrices de la surface développable. En identifiant ces équations avec (24), on trouve que φ doit vérifier l'équation :

$$(28) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial m} \right)^2 - 4m \frac{\partial \varphi}{\partial m} + 4\varphi = 0$$

C'est une équation de CLAIRAUT, dont la seule solution non linéaire est : $\varphi = m^2$

Les équations (27) prennent alors la forme :

$$(29) \quad \begin{cases} r + 2ms + tm^2 + \psi(m) = 0 \\ s + tm + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial m} = 0 \end{cases}$$

et les équations des caractéristiques s'écrivent, en poursuivant l'identification avec (24) :

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = m \\ \frac{dp}{dx} + \psi \frac{1}{2} m \frac{\partial \psi}{\partial m} = 0 \\ \frac{dq}{dx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial m} = 0 \end{array} \right.$$

auxquelles on adjoint : $\frac{dz}{dx} = p + qm$

Remarque : En écrivant, comme d'habitude, que le déterminant fonctionnel $\frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)}{D(r, s, t, m)}$ est nul, où on a posé :

$$\psi_1 = r + 2sm + tm^2 + \psi$$

$$\psi_2 = s + tm + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial m}$$

$$\psi_3 = rdx + sdy - dp$$

$$\psi_4 = sdx + tdy - dq, \text{ on retrouve pour l'équation}$$

des caractéristiques : $(dy - m dx)^2 = 0$, ce qui montre que les caractéristiques sont confondues.

4°) L'équation (1) représente une surface réglée, admettant le cône (19) pour cône directeur. Un des systèmes de caractéristiques est du 1er ordre, l'autre est du 2d ordre. Pour obtenir les équations des caractéristiques du 1er ordre, on écrit que la droite (24) est une génératrice de la surface.

5°) L'équation (1) est quelconque. Les deux systèmes de caractéristiques sont du 2d ordre.

Remarque : Toutes ces formes se conservant par des transformations de contact, il est possible de trouver dans chaque cas, des formes réduites: ainsi, pour les équations de HONGE-AMPERE, on peut annuler un des quatre coefficients A, B, C, D.

5.- Il nous reste à étudier le cas où les deux systèmes de caractéristiques sont confondus, c'est-à-dire où l'équation (1) est telle que la relation :

$$(31) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 - 4 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

soit vérifiée.

Cette équation est une équation aux dérivées partielles du 1er ordre, qui exprime que (1) est l'équation d'une surface développable, dont le plan tangent reste parallèle au plan tangent du cône (19). Le système unique de caractéristiques est donc du 1er ordre, puisque les génératrices sont parallèles à celles du cône (19). On retrouve donc le 3° du N° précédent.

6.- Nous avons défini les caractéristiques du 1er ordre, comme les courbes le long desquelles une dérivée du 2d ordre est indéterminée. De cette définition résulte que par toute caractéristique du 1er ordre, il passe une infinité de caractéristiques du 2d ordre.

En effet, les éléments du 2d ordre sont déterminés par les trois dernières équations (13). Si on élimine deux des trois dérivées du 2d ordre, il reste une équation différentielle du 1er ordre pour déterminer la troisième, le coefficient de la différentielle étant différent de zéro, si la relation (31) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire si les caractéristiques sont distinctes. Ainsi donc, puisqu'une des dérivées du 2d ordre est déterminée par une équation différentielle du 1er ordre, il y a une infinité de solutions dépendant d'une constante arbitraire, ce qui démontre la proposition.

Soient en effet les trois équations :

$$(32) \quad \begin{cases} rdx + sdy - dp = 0 \\ tdx + sdy - dq = 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx dy + \frac{\partial f}{\partial r} dy dr + \frac{\partial f}{\partial t} dx ds = 0 \end{cases}$$

Tirons par exemple r de la 1ère et t de la 2de :

$$r = \frac{dp - sdy}{dx}$$

$$t = \frac{dq - sdx}{dy}$$

La 3ème équation devient :

$$(33) \quad \frac{\partial f}{\partial x} dx dy + \frac{\partial f}{\partial z} p dx dy + \frac{\partial f}{\partial p} (dp - sdy) dy + \frac{\partial f}{\partial q} s dx dy + \frac{\partial f}{\partial r} dy \\ \left[\frac{d^2 p - s d^2 y - d s dy}{dx} - \frac{(dp - sdy) d^2 x}{(dx)^2} \right] + \frac{\partial f}{\partial t} dx ds = 0$$

dans laquelle x, y, z, p, q sont exprimés en fonction d'un paramètre θ qui définit la courbe.

Le coefficient de ds est : $-\frac{\partial f}{\partial r} \frac{(dy)^2}{dx} + \frac{\partial f}{\partial t} dx$

Il n'est nul que si $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial r}}$. En portant cette valeur dans l'équation (3), il vient :

$$2\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial s} \sqrt{\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial r}}} = 0$$

expression qui, rendue rationnelle, n'est autre que l'équation (31). On retrouve bien ainsi les résultats annoncés.

7.- Si l'équation (31) est vérifiée, l'équation (33) n'est plus une équation différentielle et elle n'admet plus une infinité de solutions. Le théorème précédent est donc en défaut.

Exceptionnellement, il se pourra que l'équation (33) soit identiquement vérifiée; là encore, la caractéristique du 1er ordre sera contenue dans une infinité de caractéristiques du 2d ordre, dépendant, cette fois, d'une fonction arbitraire : la valeur d'une des trois dérivées secondes.

§ 3 Caractéristiques d'ordre supérieur.

8.- On peut considérer les valeurs prises par les dérivées d'ordre n , le long d'une caractéristique. Les équations de cette caractéristique s'établissent comme plus haut.

Par exemple, au 3ème ordre, nous considérons les trois dérivées secondes de l'équation (1) :

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{d^2 f}{dx^2} = \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \\ \frac{d^2 f}{dx dy} = \left(\frac{d^2 f}{dx dy}\right) + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = 0 \\ \frac{d^2 f}{dz^2} = \left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0 \end{cases}$$

D'autre part, en écrivant les différentielles totales des quatre dérivées du 3ème ordre, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} dA &= \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} dx + \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} dy \\ dB &= \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} dx + \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} dy \\ dC &= \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} dx + \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} dy \\ dD &= \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} dx + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} dy \end{aligned}$$

Les relations (34) prennent alors la forme suivante :

$$(35) \begin{cases} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right) + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{dA}{dx} + \frac{f}{t} \frac{dB}{dy} = 0 \\ \left(\frac{d^2 f}{dx dy} \right) + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{dB}{dx} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dC}{dy} = 0 \\ \left(\frac{d^2 f}{dy^2} \right) + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{dC}{dx} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dD}{dy} = 0 \end{cases}$$

Les équations (7), (8), (9), (13) et (35) sont les équations des caractéristiques du 3ème ordre. Ces douze équations entre les douze variables $x, y, z, p, q, r, s, t, A, B, C, D$ se réduisent en réalité à dix par un calcul analogue à celui du N°2. De la même manière, à l'ordre n , on obtient toujours deux relations de moins que de variables.

En définitive, si les caractéristiques sont distinctes, par une caractéristique d'ordre n , il passe une infinité de caractéristiques d'ordre $n+1$, dépendant d'une constante arbitraire.

9.- De l'indétermination précédente, il résulte que par une caractéristique, il passe une infinité de surfaces intégrales, dépendant d'une fonction arbitraire: la valeur à laquelle elles se réduisent en un point de la caractéristique (1).

(1) Voir GOURSAT C.R. Ac. Sc. 1er Avril 1895 p. 712.

De même, par deux caractéristiques appartenant à chacun des deux systèmes et ayant un élément commun, il passe une surface intégrale unique.

Dans le cas des équations de MONGE-AMPERE, le théorème précédent s'applique, bien entendu, aux caractéristiques du 1er ordre.

B) INVARIANTS et INVOLUTIONS.

§ 1 Intégrales intermédiaires.

10.- La méthode générale de résolution des équations (1) consiste à chercher à intégrer le système différentiel (13). Si l'on opère sur les trois premières équations seulement, on obtient, quand la méthode réussit, une intégrale :

$$(36) \quad V(x, y, z, p, q) = 0$$

que l'on appelle intégrale intermédiaire.

Ces intégrales intermédiaires ne sont autres que ce que nous appellerons des invariants du 1er ordre, l'ordre des dérivées qui y figurent indiquant l'ordre de l'invariant. Nous aurons affaire à un invariant proprement dit si les relations sont vérifiées sans tenir compte de l'équation (36), à une involution dans le cas contraire (1)

11.- Inversement, cherchons s'il existe une relation (36), dont toutes les intégrales appartiennent à l'équation (1).

Les caractéristiques de l'équation (36) doivent être caractéristiques de l'équation (1), qui, par conséquent, admet des caractéristiques du 1er ordre. L'équation (1) doit donc être très particulière. (v; plus haut A §2)

Les caractéristiques de l'équation (36) sont définies par :

$$(37) \quad \frac{\frac{dx}{\partial V}}{\partial p} = \frac{\frac{dy}{\partial V}}{\partial q} = \frac{\frac{-dz}{\partial V} + p \frac{\partial V}{\partial z}}{\frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z}} = \frac{\frac{-dq}{\partial V} + q \frac{\partial V}{\partial z}}{\frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z}}$$

Pour définir la fonction V, on remplacera donc, dans les

(1) le mot d'involution sert à désigner le cas où la solution du système présente le plus haut degré de généralité.

équations (13), dx, dy, dp, dq par $\frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}, -\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z}\right), -\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z}\right)$ respectivement. V satisfait donc à un système d'équations simultanées du 1er ordre.

l'équation (1) admettant ici des caractéristiques du 1er ordre, les équations de celles-ci sont formées de deux relations linéaires et homogènes en dx, dy, dp, dq . Si ces deux relations, où on a remplacé dx, dy, dp, dq par $\frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}, -\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z}\right), -\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z}\right)$, forment un système en involution, la solution dépend de deux constantes arbitraires :

$$(38) \quad V(x, y, z, p, q, C_1, C_2) = 0$$

et on en déduit l'intégrale générale en posant :

$$(39) \quad C_2 = \psi(C_1)$$

$V(x, y, z, p, q, C_1, C_2)$ vérifie aussi :

$$(40) \quad \frac{\partial V}{\partial C_1} + \frac{\partial V}{\partial C_2} \psi' = 0$$

En éliminant C_1 et C_2 entre (38), (39) et (40), on obtient l'intégrale générale. Ces trois équations donnent aussi la solution du problème de CAUCHY. Il est possible, dans ce cas, de préciser la forme de l'équation (1), qui jouit de cette propriété. (1)

Il se peut que la fonction V ne dépende que d'une constante arbitraire ou même d'aucune: c'est alors une "involution", les équations en $\frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}, -\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z}\right), -\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z}\right)$, n'étant vérifiées qu'en tenant compte de $V = 0$.

§2 Invariants et involutions du 2d ordre.

12.- Etant donnée une équation (1) $f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$,

(1) V. GOURSAT Eq. Der. Part. 2d Ordre I p.62 Sqq.

cherchons à quelles conditions une deuxième équation :

$$(41) \quad \psi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

peut avoir des intégrales communes avec la première.

Différentions ces deux équations, en désignant par A, B, C, D, les dérivées du 3ème ordre.

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} r + \frac{\partial f}{\partial q} s + \frac{\partial f}{\partial r} A + \frac{\partial f}{\partial s} B + \frac{\partial f}{\partial t} C = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p} s + \frac{\partial f}{\partial q} t + \frac{\partial f}{\partial r} B + \frac{\partial f}{\partial s} C + \frac{\partial f}{\partial t} D = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} p + \frac{\partial \psi}{\partial p} r + \frac{\partial \psi}{\partial q} s + \frac{\partial \psi}{\partial r} A + \frac{\partial \psi}{\partial s} B + \frac{\partial \psi}{\partial t} C = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} q + \frac{\partial \psi}{\partial p} s + \frac{\partial \psi}{\partial q} t + \frac{\partial \psi}{\partial r} B + \frac{\partial \psi}{\partial s} C + \frac{\partial \psi}{\partial t} D = 0 \end{array} \right.$$

On a donc un système de quatre équations linéaires aux quatre inconnues A, B, C, D. Si l'on veut que les équations (1) et (41) aient des intégrales communes, il est nécessaire que le système précédent soit indéterminé.

D'où la première condition :

$$(43) \quad \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} & \frac{\partial \psi}{\partial s} & \frac{\partial \psi}{\partial t} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi}{\partial r} & \frac{\partial \psi}{\partial s} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{array} \right| = 0$$

et, reprenant les notations $\left(\frac{d}{dx} \right) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} p + \frac{\partial}{\partial p} r + \frac{\partial}{\partial q} s$
 $\left(\frac{d}{dy} \right) = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} q + \frac{\partial}{\partial p} s + \frac{\partial}{\partial q} t,$

la deuxième :

$$(44) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \left(\frac{df}{dx}\right) & \frac{\partial f}{\partial t} & 0 \\ 0 & \left(\frac{df}{dy}\right) & \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} & \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) & \frac{\partial \varphi}{\partial t} & 0 \\ 0 & \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) & \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{vmatrix} = 0$$

l'équation (43) exprime que les équations différentielles des caractéristiques des deux équations ont une racine commune. Donc, en chaque point, il faut que les deux équations aient une direction de caractéristique commune.

En développant l'équation (44), on l'écrira :

$$(44') \quad \frac{D(f, \varphi)}{D(s, t)} \left[\left(\frac{df}{dx} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \frac{\partial f}{\partial r} \right] + \frac{D(f, \varphi)}{D(r, t)} \left(\frac{df}{dy} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left[\left(\frac{d\varphi}{dy} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \right] = 0$$

Ces conditions (43) et (44), qui sont nécessaires, sont évidemment suffisantes.

Si ces conditions sont vérifiées, sans tenir compte de l'équation (41), on peut remplacer celle-ci par

$$(41') \quad \Psi(x, y, z, p, q, r, s, t) = C$$

et on a alors affaire à un invariant.

Si, au contraire, les conditions (43) et (44) ne sont vérifiées qu'en tenant compte de l'équation (41) : $\Psi = 0$, Ψ est alors une involution.

13.- On retrouve pour la caractéristique commune aux deux équations (1) et (41), les propriétés des caractéristiques que nous avons établies au ch. I §1 pour une seule équation, puisque nous retrouvons la propriété qui nous a servi de définition : l'indétermination des dérivées du 3ème ordre.

On obtient les équations différentielles de la caractéristique commune, comme on a obtenu le système (13), en remplaçant l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial f}{\partial s} dx dy + \frac{\partial f}{\partial t} dx^2 = 0$$

par : $dy - \lambda dx = 0$

λ étant la racine commune à cette équation et à l'équation analogue :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial s} dx dy + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx^2 = 0$$

la dernière équation du système (13) étant remplacée par (44).

On a ainsi un système de sept équations à huit variables :

$$(45) \left\{ \begin{array}{l} f(x,y,z,p,q,r,s,t) = 0 \\ \varphi(x,y,z,p,q,r,s,t) = 0 \\ dy - \lambda dx = 0 \\ p dx + q dy - dz = 0 \\ r dx + s dy - dp = 0 \\ s dx + t dy - dq = 0 \\ \frac{D(f,\varphi)}{D(s,t)} \left[\left(\frac{df}{dx} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \frac{\partial f}{\partial r} \right] + \frac{D(f,\varphi)}{D(r,t)} \left[\left(\frac{df}{dy} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{d\varphi}{dy} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \right] = 0 \end{array} \right.$$

pour définir les caractéristiques.

Les intégrales singulières sont définies, si elles existent, par les relations :

$$\frac{D(f,\varphi)}{D(r,s)} = 0, \quad \frac{D(f,\varphi)}{D(s,t)} = 0, \quad \frac{D(f,\varphi)}{D(t,r)} = 0$$

Si ces relations sont vérifiées, les raisonnements du N° précédent sont en défaut et ces intégrales doivent être cherchées dans chaque cas particulier.

§ 3. Invariants et involutions d'ordre supérieur.

14.- Ecrivons les équations des caractéristiques d'ordre n de l'équation (1) par la méthode étudiée au ch. I A § 3. Pour simplifier l'écriture, nous emploierons les notations.

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) - \left(\frac{df}{dx}\right)^{(2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + p^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} +$$

$$+ 2p \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + 2r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial p} + 2s \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial q} + 2pr \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p} +$$

$$+ 2ps \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial q} + 2rs \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}$$

et les notations analogues tant pour les dérivées par rapport à y que pour les dérivées d'ordre n par rapport à x ou y.

D'autre part, nous désignerons $\frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j}$ par p_{ij} .

Dans ces conditions, les caractéristiques d'ordre n s'écrivent :

$$(46) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial f}{\partial s} dx dy + \frac{\partial f}{\partial t} dx^2 &= 0 \\ p_{10} dx + p_{01} dy - dz &= 0 \\ p_{20} dx + p_{11} dy - dp_{10} &= 0 \\ \hline p_{1,n-1} dx + p_{0,n} dy - dp_{0,n-1} &= 0 \\ \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right) dx dy + \frac{\partial f}{\partial r} dy dp_{n,0} + \frac{\partial f}{\partial t} dx dp_{n-1,1} &= 0 \end{aligned} \right.$$

On obtient ainsi $2n+1$ équations à $2n+3$ variables $x, y, z, p_{10}, p_{01}, p_{11}, p_{02}, p_{12}, p_{03}, \dots, p_{1,n-1}, p_{0,n}$, les dérivées d'indice i supérieur à l'unité étant calculées par des opérations algébriques à partir de l'équation (1) et des équations déduites de celle-ci par dérivation.

On distinguera entre les deux systèmes de caractéristiques, en remplaçant la ière équation (46) soit par :

$$dy - \lambda_1 dx = 0 \quad \text{soit par :}$$

$$dy - \lambda_2 dx = 0,$$

λ_1 et λ_2 étant les deux racines de l'équation en question, où $\frac{dy}{dx}$ est l'inconnue.

Considérons maintenant une équation d'ordre n :

$$(47) \quad \Psi(x, y, z, p_{10}, p_{01}, p_{11}, p_{02}, \dots, p_{1, n-1}, p_{0, n}) = 0$$

où on a fait disparaître comme plus haut, les dérivées d'indice i supérieur à l'unité. Formons, en différentiant (1) $n-1$ fois par rapport à y et (47) par rapport à x et y , le système suivant :

$$(48) \quad \begin{cases} \left(\frac{d\Psi}{dx} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial p_{0, n}} p_{1, n} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_{1, n-1}} p_{2, n-1} = 0 \\ \left(\frac{d\Psi}{dy} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial p_{0, n}} p_{0, n+1} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_{1, n-1}} p_{1, n} = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right) + \frac{\partial f}{\partial r} p_{2, n-1} + \frac{\partial f}{\partial s} p_{1, n} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{0, n-1} = 0$$

$$\text{où } \left(\frac{d\Psi}{dx} \right) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} p_{1, 0} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_{1, 0}} p_{2, 0} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_{0, 1}} p_{1, 1} + \dots$$

$$\dots + \frac{\partial \Psi}{\partial p_{0, n-1}} p_{1, n-1} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_{1, n-2}} p_{2, n-2}$$

$$\left(\frac{d\Psi}{dy} \right) = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} p_{0, 1} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_{1, 0}} p_{1, 1} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_{0, 1}} p_{0, 2} + \dots$$

$$\dots + \frac{\partial \Psi}{\partial p_{0, n-1}} p_{0, n} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_{1, n-2}} p_{1, n-1}$$

Le système (48) est un système linéaire à trois inconnues : $p_{2, n-1}$, $p_{1, n}$, $p_{0, n+1}$. (47) sera en involution avec (1), si le système est indéterminé, c'est à dire

$$(49) \quad \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \Psi}{\partial p_{0, n}} & \frac{\partial \Psi}{\partial p_{1, n-1}} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial p_{0, n}} & \frac{\partial \Psi}{\partial p_{1, n-1}} & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial r} \end{vmatrix} = 0$$

$$(50) \quad \begin{vmatrix} \text{et} & \left(\frac{d\psi}{dx} \right) & \frac{\partial \psi}{\partial p_{0,n}} & \frac{\partial \psi}{\partial p_{1,n-1}} \\ & \left(\frac{d\psi}{dy} \right) & \frac{\partial \psi}{\partial p_{1,n-1}} & 0 \\ & \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right) & \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{ou : } \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_{1,n-1}} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy} \right) \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial p_{0,n}} - \left[\left(\frac{d\psi}{dy} \right) \frac{\partial f}{\partial s} + \left(\frac{d\psi}{dx} \right) \frac{\partial f}{\partial r} \right] \frac{\partial \psi}{\partial p_{1,n-1}} = 0$$

L'équation (49) exprime $\frac{\partial \psi}{\partial p_{0,n}}$ est solution de l'équa-

$$\text{tion (3) : } \frac{\partial f}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial f}{\partial s} dx dy + \frac{\partial f}{\partial t} dx^2 = 0$$

On peut préciser la question en distinguant suivant que $\frac{\partial \psi}{\partial p_{0,n}}$ est égal à l'une ou l'autre des racines λ_1 et $\frac{\partial \psi}{\partial p_{1,n-1}}$

λ_2 de l'équation (3).

Le système (49), (50) se décompose alors en deux :

$$(51) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial \psi}{\partial p_{0,n}} - \lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial p_{1,n-1}} = 0 \\ & \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right) \frac{\partial \psi}{\partial p_{1,n-1}} - \frac{\partial f}{\partial r} \left[\lambda_2 \left(\frac{d\psi}{dy} \right) + \left(\frac{d\psi}{dx} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

et le système analogue (51') où l'on remplace λ_1 par λ_2 et inversement.

Si ψ vérifie un des systèmes (51) ou (51'), on peut choisir arbitrairement une dérivée d'ordre $n+1$ et les deux équations (1) et (47) ont une direction de caractéristique commune, à partir de laquelle on peut obtenir une intégrale du système (1), (47).

15 - Le calcul précédent revient à chercher si l'équation : $d\psi = 0$ est une combinaison intégrale des équations des caractéristiques d'ordre n (46). C'est, au fond, la méthode de DARBOUX. Dans ces conditions, nous pouvons remplacer l'équation : (47) $\psi = 0$
par (52) $\psi = C$

ψ est alors un invariant d'ordre n , mais, suivant qu'il vérifie le système (51) ou (51'), il est relatif à l'un ou l'autre des systèmes de caractéristiques.

Réciproquement, si (1) et (52) forment un système en involution, (52) est un invariant d'un des systèmes de caractéristiques de (1). Cette propriété, capitale pour la suite prendra toute sa valeur, lorsque nous aurons introduit les caractéristiques sous la forme d'AMPERE.

16.- Soit le cas de l'involution, où les équations (51) ou (51') ne sont vérifiées qu'en tenant compte de l'équation (47). Nous allons montrer que si $\psi = 0$ pour un élément d'une caractéristique, il est nul tout le long de la caractéristique définie par cet élément.

Montrons d'abord que ψ est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre n : $P_{1,n-1}, P_{0,n}$. En effet, nous pouvons supposer ψ linéaire en $P_{1,n-1}$ par exemple, puisque

$\frac{\partial \psi}{\partial P_{1,n-1}} \neq 0$; la première équation (51) montre immédiatement qu'il est aussi linéaire en $P_{0,n}$. La deuxième équation (51) montre que la dérivée de ψ par rapport au paramètre θ de définition de la caractéristique est nulle avec ψ ;

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \lambda\psi + u\psi^2,$$

λ et μ étant des fonctions régulières dans le voisinage de la valeur initiale θ_0 . D'où la conclusion énoncée. Il y a donc une intégrale commune aux deux équations (1) et (47), que l'on détermine comme précédemment.

Dans le cas où les deux systèmes de caractéristiques sont confondues, $d\psi = 0$ est une conséquence des équations (46).

17.- Examinons le cas où l'équation (1) admet deux invariants d'ordre quelconque :

$$(53) \quad \begin{aligned} \psi &= C \\ \psi' &= C' \end{aligned}$$

Deux cas complètement différents se présentent suivant que les deux fonctions ψ et ψ' vérifient le même système (51), ou l'une le système (51) et l'autre le système (51').

1er cas. ψ vérifie le système (51) et ψ' , le système (51'). Nous supposons ψ d'ordre m et ψ' d'ordre n , avec $m > n$.

$$(51) \quad \frac{\partial \psi}{\partial P_{0,m}} - \lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial P_{1,m-1}} = 0$$

$$\left(\frac{d^{m-1}f}{dy^{m-1}} \right) \frac{\partial \psi}{\partial P_{1,m-1}} = \frac{\partial f}{\partial r} \left[\lambda_2 \left(\frac{d\psi}{dy} \right) + \left(\frac{d\psi}{dx} \right) \right] = 0$$

$$(51') \quad \frac{\partial \psi'}{\partial P_{0,n}} - \lambda_2 \frac{\partial \psi'}{\partial P_{1,n-1}} = 0$$

$$\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial P_{1,n-1}} - \frac{\partial f}{\partial r} \left[\lambda_1 \left(\frac{d\psi'}{dy} \right) + \left(\frac{d\psi'}{dx} \right) \right] = 0$$

Les premières équations (51) et (51') montrent que :

$$\frac{D(\psi, \psi')}{D(P_{0,m}, P_{1,n-1})} \neq 0, \text{ si } \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ ce que}$$

nous supposons essentiellement. On peut donc calculer $P_{0,m}$ et $P_{1,n-1}$. Si on prend comme inconnues $z, p_{10}, p_{11}, \dots, p_{1m-2}, p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0,n-1}$, on forme un système d'équations aux différentielles totales, qui est complètement intégrable, les conditions d'intégrabilité étant vérifiées

identiquement, sauf :

$$dp_{1,m-2} = P_{2,m-2}dx + p_{1,m-1}dy$$

$$dp_{0,n-1} = P_{1,n-1}dx + P_{0,n} dy,$$

qui sont une conséquence des dernières équations (51) et (51').

Donc, si ψ et φ sont deux invariants, relatifs chacun à un système différent de caractéristiques, le système :

$$f(x,y,z,p,q,r,s,t) = 0$$

$$\psi(x,y,z,p,q,r,s,t,\dots, P_{1,m-1}; P_{0,m}) = C$$

$$\varphi(x,y,z,p,q,r,s,t,\dots, P_{1,n-1}, P_{0,n}) = C'$$

est complètement intégrable.

2ème cas : Si la système (1), (53), où ψ et φ sont des invariants relatifs au même système, ont une intégrale commune, ils en ont une infinité, puisque les trois équations ont une caractéristique commune.

Sinon, le système est incompatible.

CHAPITRE II

INTEGRATION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DU 2d ORDRE PAR L'USAGE EXPLICITE DES CARACTERISTIQUES D'AMPERE (1)

§1. La Méthode d'AMPERE.

18.- Nous rappellerons brièvement, telle qu'elle se trouve exposée dans les ouvrages classiques (2), la méthode d'AMPERE.

Supposons l'intégrale générale de l'équation (1) :

$$(1) f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

écrite sous la forme :

$$(2) \begin{aligned} x &= f_1[\alpha, \beta; \psi(\alpha), \psi(\beta); \psi'(\alpha), \psi'(\beta); \dots; \psi^{(p)}(\alpha) \dots \psi^{(q)}(\beta)] \\ y &= f_2[\alpha, \beta; \psi(\alpha), \psi(\beta); \psi'(\alpha), \psi'(\beta); \dots; \psi^{(p')}(\alpha) \dots \psi^{(q')}(\beta)] \\ z &= f_3[\alpha, \beta; \psi(\alpha), \psi(\beta); \psi'(\alpha), \psi'(\beta); \dots; \psi^{(p'')}(\alpha) \dots \psi^{(q'')}(\beta)] \end{aligned}$$

D'après AMPERE, l'équation sera de 1ère classe, si si les formules (2) représentent l'intégrale générale de l'équation (1), les fonctions ψ et ψ' étant arbitraires.

La remarque fondamentale d'AMPERE est la suivante: si on donne à ψ et ψ' des formes particulières, la surface intégrale ainsi définie admet comme courbes caractéristiques, les deux familles de courbes $\alpha = \text{cte}$, $\beta = \text{cte}$.

En effet, considérons deux surfaces S et S' correspondant à la même fonction ψ et à deux fonctions ψ' et ψ'' telles que p et q aient la même valeur pour les deux surfaces. Les deux surfaces S et S' sont donc tangentes tout le long d'une courbe $\alpha = \alpha_0$, ce qui démontre la propriété énoncée.

(1) Ce titre reproduit celui du mémoire fondamental de J. DRACH, Bologne 1928.

(2) V. par exemple, GOURSAT Eq. Der. Part. 2d Ordre 1 p. 216

19.- De ce qui précède, AMPERE déduit une méthode d'intégration qui n'est pas, au fond, différente de la méthode classique par intégration des équations des caractéristiques. Il prend comme variables indépendantes, non plus x et y , mais x et λ .

$$De\ dz = p\,dx + q\,dy$$

$$dp = r\,dx + s\,dy$$

$$dq = s\,dx + t\,dy, \text{ on déduit, avec les nou-}$$

velles variables :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + q \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = q \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = r + s \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = s + t \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial \lambda} = t \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

Les trois dernières équations donnent r, s, t . En substituant ces valeurs dans l'équation (1), celle-ci devient un polynôme en $\frac{\partial q}{\partial x}$, qui doit être identiquement nul, puisqu'on peut toujours remplacer λ par $q(\lambda)$. Les équations obtenues en annulant les coefficients de ce polynôme, ne sont autres que les équations des caractéristiques du 1er ordre, puisqu'elles expriment que la droite :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = r + s \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = s + t \frac{\partial y}{\partial x}, \text{ (où } r, s, t \text{ sont les coordon-}$$

nées courantes) est située toute entière sur la surface (1).

20.- AMPERE n'a pas dépassé dans les applications de sa théorie, le cas des intégrales de 1ère classe. S'il a su pousser très loin l'étude des équations de MONGE-AMPERE et leur appliquer, en particulier, avec succès la transformation de contact qui porte son nom, il n'a pas abordé dans les applications de sa théorie générale, le cas des équations admettant des caractéristiques du 2d ordre. Mais dans certains cas, il a su utiliser les variables caractéristiques λ et β et non plus x et λ : "Lorsque β ne peut être exprimé dans l'intégrale primitive par une fonction déterminée de x et λ , il

faut prendre α et β pour variables indépendantes." (1)

Il s'est parfaitement rendu compte de la puissance de sa méthode à une époque où la recherche des intégrales intermédiaires était pour ainsi dire, le seul procédé d'intégration des équations du 2d ordre : "la méthode que j'emploie pour déduire les intégrales primitives d'un très grand nombre d'équations privées d'intégrales intermédiaires, est loin d'être aussi générale qu'on pourrait le désirer; mais c'est du moins, un premier pas dans un genre de recherches que je ne crois pas avoir été tenté et qui me paraît promettre de conduire un jour à des résultats d'une toute autre importance que ceux que j'en ai déduits jusqu'à présent." (1).

21.- Les considérations qui précèdent, permettent de retrouver la distinction fondamentale entre caractéristiques du 1er et du 2d ordre: Si les dérivées du 2d ordre, calculées à partir des formules (2), différenciées par rapport à α et β ($\frac{\partial z}{\partial \alpha} = p \frac{\partial x}{\partial \alpha} + q \frac{\partial y}{\partial \alpha}$

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = p \frac{\partial x}{\partial \beta} + q \frac{\partial y}{\partial \beta} \text{ donnent } p \text{ et } q \text{ puis}$$

on calcule : $\frac{\partial p}{\partial \alpha} = r \frac{\partial x}{\partial \alpha} + s \frac{\partial y}{\partial \alpha}$ etc.) ne contiennent pas de nouvelles dérivées de $\psi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$, les valeurs de r, s, t sont les mêmes tout le long de la courbe $\alpha = \alpha_0$ pour toutes les surfaces intégrales tangentes à la première. On a donc affaire à une caractéristique du 2d ordre.

Dans le cas contraire, les surfaces intégrales tangentes à la première le long de $\alpha = \alpha_0$, dépendent d'une infinité de constantes arbitraires et on a affaire à une caractéristique du 1er ordre.

(1) Ampère, Journal de l'Ecole royale polytechnique - XVII^e et XVIII^e cahiers 1815-1820.

22.- La méthode de DARBOUX est, dans un certain sens, la généralisation de celle d'AMPERE, en étendant la notion de caractéristique à un ordre quelconque. Elle s'explique également bien, que l'on fasse usage des variables x et y ou des variables α et β . Dans le cas où un système de caractéristiques présente au moins une combinaison intégrable : $du = 0$, le long de cette caractéristique, la fonction u reste constante et, profitant de la fonction arbitraire qui détermine α , on peut poser : $u = \alpha$.

La méthode de DARBOUX réussit, lorsque, pour chaque système de caractéristiques, il existe deux combinaisons intégrables u et v , la deuxième est alors une fonction arbitraire de la première : $v = \psi(\alpha)$.

On opérera de même pour le deuxième système de caractéristiques.

§2. La Méthode de J. DRACH.

23.- J. DRACH écrit le système Σ des caractéristiques à l'aide des variables α et β , comme l'avait fait DARBOUX, mais sans se préoccuper d'abord si on peut obtenir des combinaisons intégrables, pour déterminer α et β en fonction de x et y . C'est semble-t-il, la généralisation prévue par Ampère à sa méthode.

Le système Σ s'écrit donc, dans tous les cas où il n'y a pas de caractéristiques du 1er ordre (pour ce cas, v. plus loin § 4) :

$$\begin{aligned}
 & (3) \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\
 & (4) \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = p \frac{\partial x}{\partial \alpha} + q \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\
 & (5) \quad \frac{\partial p}{\partial \alpha} = r \frac{\partial x}{\partial \alpha} + s \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\
 & (6) \quad \frac{\partial q}{\partial \alpha} = s \frac{\partial x}{\partial \alpha} + t \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\
 & (7) \quad \left(\frac{df}{dx} \right) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} + \lambda_2 \frac{\partial s}{\partial \alpha} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\left(\sum \right) \left\{ \begin{array}{l} (3') \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \lambda_2 \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ (4') \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = p \frac{\partial x}{\partial \lambda} + q \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ (5') \quad \frac{\partial p}{\partial \lambda} = r \frac{\partial x}{\partial \lambda} + s \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ (6') \quad \frac{\partial q}{\partial \lambda} = s \frac{\partial x}{\partial \lambda} + t \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ (7') \quad \left(\frac{df}{dx} \right) \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial \beta} + \lambda_1 \frac{\partial s}{\partial \beta} \right) = 0 \end{array} \right.$$

les équations de la dernière ligne pouvant être remplacées par :

$$(8) \left(\frac{df}{dy} \right) \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} + \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial \lambda} \right) = 0$$

$$(8') \left(\frac{df}{dy} \right) \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial s}{\partial \beta} + \lambda_1 \frac{\partial t}{\partial \beta} \right) = 0$$

par un calcul en tous points analogue à celui du N°2.

D'autre part, $\left(\frac{df}{dx} \right)$ et $\left(\frac{df}{dy} \right)$ ont la même signification qu'au cha. I; λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation caractéristique :

$$(9) \quad \frac{\partial f}{\partial r} \lambda^2 - \frac{\partial f}{\partial s} \lambda + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Outre l'utilisation systématique des variables λ et β , l'idée fondamentale est d'adjoindre au système $\sum$ les conditions d'intégrabilité pour x, y, z, p, q, r, s, t , l'une de ces dernières pouvant être tirée de l'équation (1).

Pour x , la question ne se pose pas : $\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \beta} = \frac{\partial^2 x}{\partial \beta \partial \lambda}$

Pour y , on obtient l'équation :

$$(X) \quad (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \beta} + \left[\frac{d\lambda_2}{d\lambda} \right] \frac{\partial x}{\partial \beta} - \left[\frac{d\lambda_1}{d\beta} \right] \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0$$

où l'on a posé $\left[\frac{d}{d\lambda} \right] = \left(\frac{d}{d\lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \lambda}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\lambda} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \lambda} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y} + (p + \lambda_1 q) \frac{\partial}{\partial z} + (r + \lambda_1 s) \frac{\partial}{\partial p} + \right. \\ &\quad \left. + (s + \lambda_1 t) \frac{\partial}{\partial q} \right] \frac{\partial x}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

Il conviendra de bien distinguer entre ces deux symboles de "dérivées complètes", le symbole $\left[\right]$ comprenant les dérivées par rapport à toutes les variables x, y, z, p, q, r, s, t , le symbole $()$ ne comprenant pas les dérivations par rapport aux dérivées du 2d ordre.

Pour z , nous obtenons :

$$\frac{\partial p}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial q}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial q}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} = 0$$

ou : $\left[(r + \lambda_2 s) - (r + \lambda_1 s) + (s + \lambda_2 t) \lambda_1 - (s + \lambda_1 t) \lambda_2 \right] \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0$

qui est vérifiée identiquement.

Pour p , nous obtenons :

$$\frac{\partial r}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial r}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \lambda_1 \frac{\partial s}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \lambda_2 \frac{\partial s}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0$$

ou : $\frac{\partial x}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial r}{\partial \beta} + \lambda_1 \frac{\partial s}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial x}{\partial \beta} \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} + \lambda_2 \frac{\partial s}{\partial \alpha} \right) = 0$

ou, en utilisant (7) et (7') :

$$\left(\frac{df}{dx} \right) \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial r}} = \left(\frac{df}{dx} \right) \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial r}} = 0$$

la condition est ici encore, identiquement vérifiée.

Pour q , le calcul est identique à celui de p .

Pour les dérivées du 2d ordre, nous pouvons toujours considérer l'une d'entre elles, r par exemple, comme calculée à l'aide des autres variables dans l'équation (1). D'autre part, d'après les équations (8) et (8'), on peut calculer

$\frac{\partial s}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial s}{\partial \beta}$ en fonction de $\frac{\partial t}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial t}{\partial \beta}$. Les dérivées de t par rapport à α et β restent alors seules paramétriques avec celles de x , puisque les dérivées de y se calculent à l'aide des équations (3) et (3'), celles de z à l'aide de (4) et (4'), celles de p à l'aide de (5) et (5') et celles de q à l'aide de (6) et (6').

Restent donc comme éléments paramétriques: x, y, z, p, q , deux dérivées du 2d ordre, s et t par exemple, toutes les dérivées de x et t par rapport à λ seul et à β seul.

l'équation (X) et celles que l'on déduit par dérivation, permettent de calculer les dérivées de x par rapport à λ et β en fonction des dérivées paramétriques, c'est à dire prises par rapport à λ seul ou β seul.

Il nous reste à écrire la condition d'intégrabilité de s : pour cela, nous dérivons par rapport à β et λ respectivement, les équations (8) et (8'). Elle s'écrit, en posant : $F = \frac{\left(\frac{dr}{dy}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}}$

$$(T) \quad (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\partial^2 t}{\partial \lambda \partial \beta} + \left[\frac{d\lambda_2}{d\beta} \right] \frac{\partial t}{\partial \lambda} - \left[\frac{d\lambda_1}{d\lambda} \right] \frac{\partial t}{\partial \beta} + \left[\frac{dF}{d\beta} \right] \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \left[\frac{dF}{d\lambda} \right] \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0$$

On peut calculer à partir de cette dernière équation, les dérivées de t par rapport à λ et β comme on a calculé celles de x à partir de l'équation (X).

En définitive, les paramètres sont donc : $x, y, z, p, q, s, t, \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}, \dots, \frac{\partial x}{\partial \beta}, \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}, \dots, \frac{\partial t}{\partial \lambda}, \frac{\partial^2 t}{\partial \lambda^2}, \dots, \frac{\partial t}{\partial \beta}, \frac{\partial^2 t}{\partial \beta^2}, \dots$. L'ordre de dérivation auquel il convient de s'arrêter, sera déterminé par l'ordre des expressions étudiées.

Le système (Ω) de DRACH est formé du système (Σ) et des équations (X) et (T). Ce système (Ω) est le système normal et son étude remplace celle de l'équation (1). Il comprend douze équations pour déterminer les inconnues en fonction des éléments paramétriques $\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial x}{\partial \beta}, \frac{\partial t}{\partial \lambda}, \frac{\partial t}{\partial \beta}$, c'est à dire de quatre fonctions arbitraires. Le système étant invariant pour tout changement de λ en $\psi(\lambda)$ et de β en $\psi(\beta)$, il reste deux fonctions arbitraires.

L'étude de l'équation (1) ou du système (Ω) ne sont pas deux problèmes équivalents: on ne peut en effet, pas déduire de (1) tous les éléments de (Ω), alors que l'inverse est possible. De même; pour les relations d'ordre supérieur, la dérivation de (1) ajoute deux dérivées nouvelles, alors que celle de (Ω) en ajoute quatre, cette circonstance provenant de l'invariance de (Ω) pour le changement de α en $f(\alpha)$ ou de β en $g(\beta)$.

§3. Invariants et involutions.

24.- Comme dans la théorie classique, nous chercherons à déterminer des invariants pour l'une ou l'autre caractéristique, c'est à dire des relations

$$(10) \quad \phi(x, y, z, p, q, s, t, \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}, \dots, \frac{\partial^n x}{\partial \alpha^n}, \frac{\partial x}{\partial \beta}, \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}, \dots, \dots, \frac{\partial^n t}{\partial \beta^n}, \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2}, \dots, \frac{\partial^p t}{\partial \alpha^p}, \frac{\partial t}{\partial \beta}, \frac{\partial^2 t}{\partial \beta^2}, \dots, \frac{\partial^p t}{\partial \beta^p}) = 0$$

qui soient compatibles avec le système (Ω).

Montrons d'abord qu'un invariant ϕ , relatif à la caractéristique α , ne dépend pas des dérivées $\frac{\partial x}{\partial \beta}, \dots, \frac{\partial t}{\partial \beta}$, relatives à β .

En dérivant par rapport à β , on déduit de la relation (10) :

$$(11) \quad \left[\frac{d\phi}{d\beta} \right] = \left[\frac{d\phi}{dx} \right] \frac{\partial x}{\partial \beta} + \left[\frac{d\phi}{dy} \right] \frac{\partial y}{\partial \beta} + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial \left(\frac{\partial^n x}{\partial \alpha^n} \right)} \frac{\partial^{p+1} x}{\partial \beta^{p+1}} + \dots + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial \left(\frac{\partial^p t}{\partial \alpha^p} \right)} \frac{\partial^{p+1} t}{\partial \beta^{p+1}} = 0$$

en désignant par n l'ordre de la dernière dérivée de x , et p celle de la dernière dérivée de t par rapport à β .

L'expression (11) doit être vérifiée, quelles que soient les valeurs des dérivées paramétriques, d'où il résulte que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \left(\frac{\partial^n x}{\partial \beta^n} \right)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \left(\frac{\partial^p t}{\partial \beta^p} \right)} = 0$$

Donc ϕ ne dépend pas de $\frac{\partial^n x}{\partial \beta^n}$, ni de $\frac{\partial^p t}{\partial \beta^p}$. Le raisonnement se répète à l'ordre $n-1$ et $p-1$; de proche en proche, on voit que:

Un invariant relatif à une caractéristique est indépendant des dérivées paramétriques relatives à l'autre.

ϕ s'écrira donc :

$$(10') \quad \phi(x, y, z, p, q, s, t, \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}, \dots, \frac{\partial^n x}{\partial \alpha^n}, \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2}, \dots, \dots, \frac{\partial^n t}{\partial \alpha^n}) = \psi(\alpha)$$

(11) deviendra :

$$(11') \quad \left[\frac{d\phi}{d\beta} \right] = \left\{ \left[\frac{d\phi}{dx} \right] + \lambda_2 \left[\frac{d\phi}{dy} \right] \right\} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial \phi}{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + \dots +$$

$$\dots + \frac{\partial \phi}{\partial \left(\frac{\partial^n x}{\partial \alpha^n} \right)} \frac{\partial^{n+1} x}{\partial \alpha^n \partial \beta} + \frac{\partial \phi}{\partial \left(\frac{\partial t}{\partial \alpha} \right)} \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial \left(\frac{\partial^n t}{\partial \alpha^n} \right)} \frac{\partial^{n+1} t}{\partial \alpha^n \partial \beta} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \frac{\partial t}{\partial \beta} = 0$$

Les dérivées $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta}$, $\frac{\partial^3 x}{\partial \alpha^2 \partial \beta}$, ..., $\frac{\partial^{n+1} x}{\partial \alpha^n \partial \beta}$ se cal-

culent à partir de l'équation (X) et sont linéaires et homogènes en $\frac{\partial x}{\partial \beta}$ et $\frac{\partial t}{\partial \beta}$, les coefficients de ces deux termes étant eux mêmes linéaires en $\frac{\partial^n x}{\partial \alpha^n}$ et $\frac{\partial^n t}{\partial \alpha^n}$.

En effet, l'équation (X) s'explicite de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + \left[\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} + (p+q \lambda_1) \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} + (r+s \lambda_1) \frac{\partial \lambda_2}{\partial p} + \right. \\
 & \quad \left. + (s+t \lambda_1) \frac{\partial \lambda_2}{\partial q} \right] \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} - \\
 & - \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + (p+q \lambda_2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + (r+s \lambda_2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial p} + \right. \\
 & \quad \left. + (s+t \lambda_2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial q} \right] \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \\
 & + \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \alpha} \right. \right. \\
 & \quad \left. \frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) + \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) = 0
 \end{aligned}$$

où les expressions $\frac{\partial r}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial r}{\partial \beta}$, $\frac{\partial s}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial s}{\partial \beta}$ s'expriment linéairement aussi en $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x}{\partial \beta}$ pour les dérivées par rapport à α et en $\frac{\partial x}{\partial \beta}$, $\frac{\partial t}{\partial \beta}$ pour les dérivées par rapport à β , le calcul se faisant à partir des équations (7), (7') et (8) (8').

En définitive, $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} = \left(A \frac{\partial x}{\partial \alpha} + B \frac{\partial t}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial x}{\partial \beta} + C \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial t}{\partial \beta}$ où A, B, C sont fonctions de x, y, z, p, q, r, s, t.

En différentiant par rapport à α :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3 x}{\partial \alpha^2 \partial \beta} = & \left\{ A \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + B \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2} + \left[\frac{dA}{d\alpha} \right] \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \left[\frac{dB}{d\alpha} \right] \frac{\partial t}{\partial \alpha} + (A \frac{\partial x}{\partial \alpha} + B \frac{\partial t}{\partial \alpha})^2 \right\} \frac{\partial x}{\partial \beta} \\
 & + C (A \frac{\partial x}{\partial \alpha} + B \frac{\partial t}{\partial \alpha}) \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial t}{\partial \beta} + C \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} + \left[\frac{dC}{d\alpha} \right] \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial t}{\partial \beta} + \\
 & + C \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} \frac{\partial t}{\partial \beta}
 \end{aligned}$$

Dans cette expression, $\left[\frac{dA}{d\alpha} \right]$, $\left[\frac{dB}{d\alpha} \right]$, $\left[\frac{dC}{d\alpha} \right]$, sont elles-mêmes, linéaires et homogènes en $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial t}{\partial \alpha}$. D'autre part,

$\frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta}$ se calcule à partir de l'équation (T), comme $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta}$ à partir de l'équation (X). C'est aussi un polynôme linéaire et homogène en $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial t}{\partial \alpha}$, d'une part et en $\frac{\partial x}{\partial \beta}$, $\frac{\partial t}{\partial \beta}$, de l'autre.

Donc $\frac{\partial^3 x}{\partial \alpha^2 \partial \beta}$ est 1°) linéaire et homogène en $\frac{\partial x}{\partial \beta}$, $\frac{\partial t}{\partial \beta}$
 2°) les coefficients de $\frac{\partial x}{\partial \beta}$ et $\frac{\partial t}{\partial \beta}$ sont eux-mêmes linéaires en $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}$ et $\frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2}$ les autres termes étant également de poids 2, c'est-à-dire formés des termes $(\frac{\partial x}{\partial \alpha})^2$, $\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial t}{\partial \alpha}$, $(\frac{\partial t}{\partial \alpha})^2$.

Il est bien évident que le calcul que nous venons de détailler pour $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta}$ et $\frac{\partial^3 x}{\partial \alpha^2 \partial \beta}$ peut se faire d'une manière en tous points analogue pour $\frac{\partial^4 x}{\partial \alpha^3 \partial \beta}$, ..., $\frac{\partial^{n+1} x}{\partial \alpha^n \partial \beta}$ d'une part et pour $\frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta}$, $\frac{\partial^3 t}{\partial \alpha^2 \partial \beta}$, ..., $\frac{\partial^{n+1} t}{\partial \alpha^n \partial \beta}$ de l'autre.

L'équation (11) prend donc, en définitive, la forme :

$$(12) \quad \frac{d\phi}{d\beta} = \lambda(\phi) \frac{\partial x}{\partial \beta} + \mu(\phi) \frac{\partial t}{\partial \beta} = 0$$

et doit être vérifiée, quelles que soient les valeurs données aux dérivées paramétriques $\frac{\partial x}{\partial \beta}$, $\frac{\partial t}{\partial \beta}$. Donc (12) est équivalent au système :

$$(13) \quad \begin{cases} \lambda(\phi) = 0 \\ \mu(\phi) = 0 \end{cases}$$

où λ et μ sont deux équations linéaires aux dérivées partielles en ϕ . La discussion de ce système est classique et on retrouve le résultat de DARBOUX, relatif aux invariants d'ordre supérieur.

25.- On peut supposer ϕ résolu en $\frac{\partial^n x}{\partial \alpha^n}$, dérivée d'ordre le plus élevé qui y figure. De l'invariance de ϕ pour une transformation de α en $f(\alpha)$, où f est arbitraire, il résulte que ϕ est également linéaire en $\frac{\partial^n t}{\partial \alpha^n}$; il résulte aussi que ϕ est rationnel par rapport aux dérivées de x et t en α , d'ordre inférieur à n . ϕ est formé de polynômes invariants relatifs, c'est-à-dire multipliés par une même expression quand on effectue la transformation de α en $f(\alpha)$. Ces polynômes sont donc de même poids par rapport aux dérivées de x et t en α .

1er ordre : ϕ est de la forme $A \frac{\partial x}{\partial \alpha} + B \frac{\partial t}{\partial \alpha} + C$

2d ordre : $A \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + B \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2} + C \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + D \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial t}{\partial \alpha} + E \left(\frac{\partial t}{\partial \alpha} \right)^2 + F \frac{\partial x}{\partial \alpha} + G \frac{\partial t}{\partial \alpha} + H$

où les coefficients sont des fonctions de x, y, z, p, q, s, t , qui ne sont pas changés par la transformation de α en $f(\alpha)$.

Ainsi donc, les polynômes avec lesquels on forme les invariants ϕ sont invariants en forme pour la transformation considérée de α en $f(\alpha)$.

On obtiendra des invariants absolus en considérant des quotients d'invariants relatifs de même poids.

26.- De même, on peut considérer des involutions :

$$(14) \quad \psi(x, y, z, p, q, s, t, \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \dots, \frac{\partial^n x}{\partial \alpha^n}, \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \dots, \frac{\partial^n t}{\partial \alpha^n}) = 0$$

On démontre comme précédemment, que ces involutions ne doivent contenir que des dérivées par rapport à α , si elles sont relatives à la caractéristique α , ou des dérivées par rapport à β , si elles sont relatives à la caractéristique β .

En écrivant encore $\left[\frac{d\psi}{d\beta} \right] = 0$, on est amené encore à écrire une équation analogue à (12) :

$$(15) \quad \lambda(\psi) \frac{\partial x}{\partial \beta} + \mu(\psi) \frac{\partial t}{\partial \beta} = 0$$

et le système

$$(16) \quad \begin{cases} \lambda(\psi) = K\psi \\ \mu(\psi) = K'\psi \end{cases}, \text{ qui remplace le système}$$

(13), et exprime que l'invariance n'est obtenue qu'en tenant compte de (14); c'est, on l'a vu, la définition même des involutions.

De ce que les égalités (14) et (16) sont conservées pour une transformation de α en $f(\alpha)$, on déduit également les propriétés d'isobarie des involutions ψ .

Dans le cas où ψ ne dépend pas des dérivées paramétriques, ψ est une équation en involution avec l'équation (1)⁽¹⁾. Si ψ ne dépend que de x, y, z, p, q , il s'agira d'une intégrale intermédiaire.

(1) Voir GOURSAT, Equations aux dérivées partielles du 2d ordre Ch VI.

§4. Equations admettant des caractéristiques
du 1er ordre.

27.- Equations de MONGE-AMPERE.

Nous écrirons ces équations sous la forme :

$$(17) \quad (r-A) \quad (t-D) - (s-B) \quad (s-C) = 0$$

où A, B, C, D sont des fonctions de x, y, z, p, q ; le coefficient de $rt-s^2$ est égal à l'unité, ce que l'on peut toujours supposer, même si l'équation est simplement linéaire en r, s, t , après avoir effectué une transformation de contact. Par le même procédé, on peut d'ailleurs en même temps, annuler un des coefficients A, B, C, D .

D'après la méthode classique (v.Ch.I §2), les caractéristiques sont définies par :

$$(18) \quad \begin{aligned} dz &= pdx + qdy \\ dp &= Adx + Bdy \\ dq &= Cdx + Ddy \end{aligned} \quad (18') \quad \begin{aligned} dz &= pdx + qdy \\ dp &= Adx + Cdy \\ dq &= Bdx + Ddy \end{aligned}$$

En introduisant les variables α et β , on obtient le système (Ω) :

$$(\Omega) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \alpha} = A \frac{\partial x}{\partial \alpha} + B \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial p}{\partial \beta} = A \frac{\partial x}{\partial \beta} + C \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial q}{\partial \alpha} = C \frac{\partial x}{\partial \alpha} + D \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial q}{\partial \beta} = B \frac{\partial x}{\partial \beta} + D \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{cases}$$

Les conditions d'intégrabilité de p et q n'interviennent pas ici dans le système (Ω), qui est du 1er ordre, et servent seulement à calculer les dérivées de x et y par rapport à α et β en fonction des dérivées de x et y par rapport à α seul ou β seul, qui sont ici les éléments paramétriques.

28.- Equations linéaires.

Dans le cas particulier où ces équations sont simplement linéaires, il est généralement plus simple de traiter le cas directement plutôt que d'effectuer une transformation de contact.

Soit l'équation :

$$(19) \quad r + (\lambda_1 + \lambda_2) s + \lambda_1 \lambda_2 + M = 0$$

où λ_1, λ_2 , M sont des fonctions de x, y, z, p, q .

La théorie classique (v. Ch. I §2) permet d'écrire les caractéristiques sous la forme :

$$(20) \begin{cases} dy - \lambda_1 dx = 0 \\ dp + \lambda_2 dq + M dx = 0 \end{cases} \quad (20') \begin{cases} dy - \lambda_2 dx = 0 \\ dp + \lambda_1 dq + M dx = 0 \end{cases}$$

Le système (Σ) est donc :

$$dz = p dx + q dy$$

$$(\Sigma) \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial x} = 0 & \frac{\partial y}{\partial \beta} - \lambda_2 \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial q}{\partial x} + M \frac{\partial x}{\partial x} = 0 & \frac{\partial p}{\partial \beta} + \lambda_1 \frac{\partial q}{\partial \beta} + M \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0 \end{cases}$$

Ici, on ne peut pas considérer les éléments $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial \beta}, \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2}, \dots$ comme paramétriques; il convient donc, pour former le système (Ω), d'adjoindre la condition d'intégrabilité de y , qui s'écrit :

$$(X) \quad (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial \beta} + \left[\frac{d\lambda_1}{d\beta} \right] \frac{\partial x}{\partial x} - \left[\frac{d\lambda_2}{d\alpha} \right] \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0$$

Le système (Ω) est donc formé du système (Σ) et de l'équation (X). Les éléments paramétriques sont ici

$$\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial x}{\partial \beta}, \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}, \dots, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial q}{\partial \beta}, \frac{\partial^2 q}{\partial \beta^2}, \dots$$

$$29.- \text{Equations} \quad r + sm + \psi - \frac{1}{2} m \frac{\partial \psi}{\partial m} = 0$$

$$(21) \quad s + tm + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial m} = 0$$

où ψ est une fonction de x, y, z, p, q, m .

Les deux systèmes de caractéristiques sont ici confondus (v. Ch. I § 2 N°4, 3° et N°5) et définis par :

$$dy - m dx = 0$$

Le système (Ω) est ici identique aux équations des caractéristiques, telles qu'on les a vues ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 (Ω) \quad & dy = m dx \\
 & dz = (p + qm) dx \\
 & dp = \left(\frac{1}{2m} \frac{\partial \psi}{\partial m} - \psi \right) dx \\
 & dq = - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial m} dx
 \end{aligned}$$

30.- Equations linéaires homogènes et dont les coefficients dépendent de p et q seulement.

α et β s'obtiennent par intégration des équations différentielles ordinaires du 1er ordre :

$$\begin{aligned}
 (22) \quad & dp + \lambda_2 dq = M_2 d\alpha \\
 & dp + \lambda_1 dq = M_1 d\beta
 \end{aligned}$$

On peut déterminer p et q en α et β et par suite, λ₁ et λ₂ à l'aide des mêmes variables. On posera donc :

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & \lambda_1(p, q) = \mu(\alpha, \beta) \\
 & \lambda_2(p, q) = \nu(\alpha, \beta)
 \end{aligned}$$

Alors x et y sont données par le système :

$$\begin{aligned}
 (24) \quad & \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \mu \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\
 & \frac{\partial y}{\partial \beta} = \nu \frac{\partial x}{\partial \beta}
 \end{aligned}$$

L'équation (X) est ici une équation de LAPLACE. Une équation analogue donne y; elle a d'ailleurs les mêmes invariants que l'équation (X).

Inversement, si l'on se donne une équation de LAPLACE:

$$(25) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + A \frac{\partial x}{\partial \alpha} + B \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0,$$

μ et ν sont déterminés par le système :

$$\begin{aligned}
 (26) \quad & \frac{\partial \mu}{\partial \beta} = (\mu - \nu) A \\
 & \frac{\partial \nu}{\partial \alpha} = (\mu - \nu) B
 \end{aligned}$$

μ et ν dépendent donc aussi d'une équation de LAPLACE.

$$(27) \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial \alpha \partial \beta} - A \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} + \left(B - \frac{\partial \text{Log } A}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \mu}{\partial \beta} = 0$$

$$(27') \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial \alpha \partial \beta} - \left(A + \frac{\partial \text{Log } B}{\partial \beta} \right) \frac{\partial \nu}{\partial \alpha} + B \frac{\partial \nu}{\partial \beta} = 0$$

Leur intégration introduit deux fonctions arbitraires l'une de α seul et l'autre de β seul.

p et q sont déterminés par le système :

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \nu \frac{\partial q}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \beta} + \mu \frac{\partial q}{\partial \beta} = 0 \end{cases}$$

dont l'intégration introduit deux nouvelles fonctions arbitraires, l'une de α seul, l'autre de β seul.

λ_1 et λ_2 dépendent donc de quatre fonctions arbitraires et toutes ces équations s'intègrent en même temps qu'une seule équation de LAPLACE.

31. -- Exemple. Soit l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima :

$$(29) \quad (\alpha - \beta) \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0$$

dont l'intégrale générale est :

$$x = (\alpha - \beta) [\psi'(\beta) - \psi'(\alpha)] + 2[\psi(\beta) + \psi(\alpha)]$$

on a alors :

$$\mu = - \int \frac{\psi_0'(\alpha) d\alpha}{\alpha - \beta} + \psi_0'(\beta)$$

$$\nu = (\alpha - \beta) \left(\int \frac{\psi_0'(\alpha) d\alpha}{(\alpha - \beta)^2} - \int \frac{\psi_0'(\alpha) d\alpha}{\alpha - \beta} + \psi_0'(\beta) - (\alpha - \beta) \psi_0'(\beta) \right)$$

q est donné par l'équation :

$$(\mu - \nu) \frac{\partial^2 q}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial \nu}{\partial \beta} \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\partial q}{\partial \beta} = 0$$

$$\text{puis } p \text{ par : } dp = -\nu \frac{\partial q}{\partial \alpha} d\alpha - \mu \frac{\partial q}{\partial \beta} d\beta$$

Dans les cas particuliers où on se donne $\psi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$, on peut aller plus loin. Si, par exemple, $\psi = 1$, $\psi = 0$, on trouve :

$\mu = -\text{Log}(\alpha - \beta)$, $\nu = -\text{Log}(\alpha - \beta) - 1$
 q est donné par :

$$(\alpha - \beta) \frac{\partial^2 q}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial q}{\partial \alpha} - \frac{\partial q}{\partial \beta} = 0$$

C'est une équation d'EULER et POISSON, dont l'intégrale générale est :

$$q(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha) \int_0^1 \psi_1 \left[\alpha + (\beta - \alpha)t \right] \frac{t}{t-1} dt + \\ + \int_0^1 \psi_1 \left[\alpha + (\beta - \alpha)t \right] \frac{dt}{(1-t)^2}$$

où ψ_1 et ψ_1 sont arbitraires.

32.- Equation $r = \lambda^2 t$, où λ est fonction de x et y .

Le système (Ω) s'écrit :

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x} - \lambda \frac{\partial x}{\partial x} = 0 & \frac{\partial y}{\partial \beta} + \lambda \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} - \lambda \frac{\partial q}{\partial x} = 0 & \frac{\partial p}{\partial \beta} + \nu \frac{\partial q}{\partial \beta} = 0 \end{cases}$$

avec $(X) \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\lambda \frac{\partial x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) = 0$

Les équations de la 1ère ligne s'intègrent et donnent α et β en fonction de x et y . Si on fait l'inversion, on a alors x et y puis λ en fonction de α et β .
 Nous poserons :

$$(30) \quad \lambda(x, y) = \mu(\alpha, \beta).$$

L'équation (X) est alors une équation de LAPLACE. On peut la ramener à une équation à invariants égaux en posant :

$$(31) \quad x = \frac{z}{\sqrt{\mu}}$$

z est alors solution de :

$$(32) \quad \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial^2 \sqrt{\mu}}{\partial \alpha \partial \beta}$$

Inversement, si on connaît deux solutions θ et $\sqrt{\mu}$ de cette équation, on peut en déduire :

$$x = \frac{\theta}{\sqrt{\mu}}$$

puis y par quadratures :

$$dy = \mu \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha - \frac{\partial x}{\partial \beta} d\beta \right)$$

ce qui donne x et y en α et β ; puis on en déduit α et β en x et y et $\mu(\alpha, \beta) = \lambda(x, y)$.

On obtient ainsi une équation :

$$r = \lambda^2 t,$$

que l'on a intégrée à l'aide de deux solutions de l'équation (32).

Exemple : $\sqrt{\mu} = \alpha$, $\theta = \beta$; $x = \frac{\beta}{\alpha}$, $y = -\alpha\beta$, $\lambda = -\frac{y}{x}$

l'équation est donc : $rx^2 = ty^2$, dont l'intégration est élémentaire.

$$\begin{aligned} \text{On en déduit ensuite : } q &= \frac{\psi'(\beta)}{\alpha} + 2\psi(\alpha) + 4\alpha\psi' + \alpha^2\psi'' \\ p &= -\alpha\psi' + 2\alpha^3\psi' + \alpha^4\psi'' \\ z &= -2\psi - \beta(2\alpha\psi + 2\alpha^2\psi') \end{aligned}$$

ψ et ψ' étant des fonctions arbitraires des arguments indiqués.

En revenant aux variables x et y, on obtient l'intégrale générale : $z = -2\psi(xy) - \sqrt{-xy}\phi\left(\frac{y}{x}\right)$.

33.- Equation $rt - s^2 + \lambda^2 = 0$.

Cette équation n'avait été résolue avant DRACH, que dans des cas très particuliers : $\lambda = a$, constante absolue

$$\lambda = \frac{a}{1 + p^2 + q^2}, \text{ équation}$$

des surfaces à courbure totale constante.

DRACH a donné une solution qui ramène à une équation de LAPLACE à invariants égaux l'équation précédente, lorsque λ est fonction des quatre arguments x, y, p, q.

Le système (S₂) s'écrit ici :

$$\begin{aligned} (S_2) \quad \frac{\partial p}{\partial \alpha} - \lambda \frac{\partial y}{\partial \alpha} &= 0 & \frac{\partial p}{\partial \beta} + \lambda \frac{\partial y}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= 0 & \frac{\partial q}{\partial \beta} - \lambda \frac{\partial x}{\partial \beta} &= 0 \end{aligned}$$

Nous ferons avec DRACH, le changement de variables suivant :

$$x = \frac{\xi}{\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{\zeta}, \quad p = \xi_1 \zeta, \quad q = \eta_1 \zeta, \quad \lambda = \zeta^2$$

Le système (Ω) devient :

$$\frac{\partial(\xi_1 \zeta)}{\partial \alpha} = \zeta^2 \frac{\partial(\frac{\eta}{\zeta})}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial(\xi_1 \zeta)}{\partial \beta} = -\zeta^2 \frac{\partial(\frac{\eta}{\zeta})}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial(\eta_1 \zeta)}{\partial \alpha} = -\zeta^2 \frac{\partial(\frac{\xi}{\zeta})}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial(\eta_1 \zeta)}{\partial \beta} = \zeta^2 \frac{\partial(\frac{\xi}{\zeta})}{\partial \beta}$$

auquel nous ajouterons les conditions d'intégrabilité pour les quatre fonctions : $\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}, \xi_1 \zeta, \eta_1 \zeta$.

1°) Condition pour $\xi_1 \zeta$:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left[\zeta^2 \frac{\partial(\frac{\eta}{\zeta})}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\zeta^2 \frac{\partial(\frac{\eta}{\zeta})}{\partial \beta} \right] = 0$$

elle s'écrit, tous calculs faits : $\frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha \partial \beta}$

2°) Condition pour $\eta_1 \zeta$: on trouve de même :

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \beta}$$

3°) Condition pour $\frac{\eta}{\zeta}$: $\frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial(\xi_1 \zeta)}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial(\xi_1 \zeta)}{\partial \beta} \right] = 0$

elle s'écrit, à condition d'introduire dès le début du calcul $\frac{1}{\xi}$ au lieu de $\frac{\xi}{\zeta}$:

$$\frac{1}{\xi_1} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \alpha \partial \beta} = \xi \frac{\partial^2 (\frac{1}{\xi})}{\partial \alpha \partial \beta}$$

4°) Condition pour $\frac{\xi}{\zeta}$: On trouve de même : $\frac{1}{\eta_1} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \alpha \partial \beta} = \eta \frac{\partial^2 (\frac{1}{\eta})}{\partial \alpha \partial \beta}$

De ce qui précède il résulte donc que $\xi, \eta, \xi_1, \frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\eta_1}$

sont cinq solutions d'une même équation de MOUTARD :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = M \theta$$

Ces cinq solutions devront être liées par la relations :

$$\lambda = \lambda(x, y, p, q), \text{ qui devient: } \zeta^2 = \lambda\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}, \xi_1 \zeta, \eta_1 \zeta\right)$$

§5. Equations $f(r,s,t) = 0$.

34.- Equations homogènes. (1)

Ces équations s'introduisent à propos de l'étude des congruences W (où les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale), dont la surface moyenne est un plan.

On formera la congruence en menant par chaque point P d'un plan qui correspond par orthogonalité à une surface génératrice (S) , une droite parallèle à la normale à (S) au point correspondant M .

Soit $M(x,y,z)$ un point quelconque de (S) , P a pour coordonnées $(-y,x,0)$ et Δ a pour équation :

$$(33) \quad \begin{aligned} x_1 &= -y + p\lambda \\ y_1 &= x + q\lambda \\ z_1 &= -\lambda \end{aligned}$$

Les points focaux sont définis par :

$$(34) \quad \frac{dx_1}{p} = \frac{dy_1}{q} = \frac{dz_1}{-1}$$

En remplaçant dans (34) dx_1, dy_1, dz_1 par leur valeurs (33), il vient :

$$(35) \quad \begin{aligned} -dy + \lambda dp &= 0 \\ dx + \lambda dq &= 0 \end{aligned}$$

De (35) il résulte immédiatement que :

$$dpdx + dqdy = 0$$

C'est l'équation des asymptotiques de (S) et on a aussi :

$$\lambda^2 = \frac{1}{s^2 - rt} \quad (2)$$

(1) Cet exemple présente un intérêt particulier au sujet du développement de la pensée de J. DRACH. Il se trouve en effet exposé dans le Bulletin de la Sté Mathématique de France de 1924; il représente donc la première utilisation des variables caractéristiques, dont l'introduction systématique représente l'originalité profonde de la méthode.

(2) Ce résultat est à rapprocher du N° précédent où les équations étudiées sont celles dont les caractéristiques sont asymptotiques des surfaces intégrales.

Si la congruence est (W), les asymptotiques de correspondent sur les deux nappes et l'équation différentielle de ces deux nappes est invariante pour le changement de λ en $-\lambda$. Cette équation différentielle s'écrit :

$$\begin{vmatrix} d^2(p\lambda) & d^2(q\lambda) & -d\lambda \\ \lambda r + p \frac{\partial \lambda}{\partial x} & 1 + \lambda s + q \frac{\partial \lambda}{\partial x} & \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ -1 + \lambda s + p \frac{\partial \lambda}{\partial y} & \lambda t + q \frac{\partial \lambda}{\partial y} & \frac{\partial \lambda}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

avec la condition que les deux équations :

$$(38) (\lambda d^2 p + 2d\lambda dp) \left(s \frac{\partial \lambda}{\partial y} - t \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) - (\lambda d^2 q + 2d\lambda dq) \left(r \frac{\partial \lambda}{\partial y} - s \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) = 0$$

$$(39) (\lambda d^2 p + 2d\lambda dp) \frac{\partial \lambda}{\partial y} - (\lambda d^2 q + 2d\lambda dq) \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$$

soient identiques. D'où plusieurs cas possibles :

$$1^\circ) s - t \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial x}}{\frac{\partial \lambda}{\partial y}} = r \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial y}}{\frac{\partial \lambda}{\partial x}} - s \text{ ou } r \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 - 2s \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + t \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 = 0$$

Les lignes $\lambda = \text{Cte}$ sont des asymptotiques de (S). Comme $\frac{1}{\lambda^2} = s^2 - rt = \omega$, ω est solution de la même équation et (S) est donnée par une équation du 3ème ordre.

2°) Le déterminant $r \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 - 2s \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + t \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 \neq 0$, on a les deux égalités :

$$\lambda d^2 p + 2d\lambda dp = 0$$

$$\lambda d^2 q + 2d\lambda dq = 0, \text{ qui doivent être iden-}$$

tiques.

Elles s'écrivent, en désignant par A,B,C,D les dérivées 3èmes :

$$\lambda (Adx^2 + 2Bdx dy + Cdy^2) + 2(rdx + sdy) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda}{\partial y} dy \right) = 0$$

$$\lambda (Bdx^2 + 2Cdx dy + Ddy^2) + 2(sdx + tdy) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda}{\partial y} dy \right) = 0$$

D'où les deux équations de condition :

$$\frac{\lambda A + 2r \frac{\partial \lambda}{\partial x}}{\lambda B + 2s \frac{\partial \lambda}{\partial x}} = \frac{\lambda B + r \frac{\partial \lambda}{\partial y} + s \frac{\partial \lambda}{\partial x}}{\lambda C + s \frac{\partial \lambda}{\partial y} + t \frac{\partial \lambda}{\partial x}} = \frac{\lambda C + s \frac{\partial \lambda}{\partial y}}{\lambda D + t \frac{\partial \lambda}{\partial y}}$$

Mais on trouve, pour les deux, si $rt \neq 0$:

$$(40) \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0$$

On peut donc poser :

$$r = Ms + Nt$$

$$A = MB + NC$$

$$B = MC + ND$$

En dérivant la première, on trouve, en tenant compte des deux autres :

$$\frac{\partial M}{\partial x} s + \frac{\partial N}{\partial x} t = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} s + \frac{\partial N}{\partial y} t = 0$$

Pour que s et t soient différents de zéro, il est donc nécessaire que : $\frac{D(M,N)}{D(x,y)} = 0$

Nous poserons : $N = f(M)$. Il vient :

$$s + f'(M) t = 0$$

$$r = Ms + f(M) t$$

En éliminant M , il vient : $\frac{r}{s} = F\left(\frac{s}{t}\right)$, équation homogène la plus générale en r, s, t .

$$\text{Soit donc (41) } \frac{r}{s} = F\left(\frac{s}{t}\right)$$

l'équation proposée.

Prenons comme variables indépendantes u et v , qui correspondent aux asymptotiques de (S) (1), telles que :

$$(42) \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \lambda \frac{\partial p}{\partial u}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -\lambda \frac{\partial p}{\partial v}$$

$$(42') \quad \frac{\partial x}{\partial u} = -\lambda \frac{\partial q}{\partial u}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \lambda \frac{\partial q}{\partial v}$$

où λ est une fonction de u et de v .

En éliminant λ , on voit que la relation :

$$(43) \quad dpdx + dqdy = 0$$

est vérifiée, ce qui montre que les variables u et v correspondent aux asymptotiques de (S) . λ vérifie encore la relation (36).

De (42) et (42'), on déduit :

$$dx \neq \frac{\frac{\partial q}{\partial u} du - \frac{\partial q}{\partial v} dv}{\frac{\partial p}{\partial u} du - \frac{\partial p}{\partial v} dv} dy = 0$$

Donc, sur le système d'asymptotiques $u = \text{Cte}$, on a :

$$(44) \quad dx + \frac{\frac{\partial q}{\partial v}}{\frac{\partial p}{\partial v}} dy = 0$$

et, sur le système $v = \text{Cte}$:

$$(45) \quad dx + \frac{\frac{\partial q}{\partial u}}{\frac{\partial p}{\partial u}} dy = 0$$

Nous poserons : $\frac{\partial q}{\partial v} = \sigma - \frac{\partial p}{\partial v}$

$$(46) \quad \frac{\partial q}{\partial u} = \tau - \frac{\partial p}{\partial u}$$

où les fonctions σ et τ ne dépendent que d'un seul argument, ~~par~~ par exemple.

Les équations (42), (42') et (46) nous permettent d'écrire les conditions d'intégrabilité pour x, y, q , en conservant p comme seule fonction inconnue. Nous posons $L = \frac{1}{2} \text{Log } \lambda$

Condition d'intégrabilité de q :

$$(47) \quad -(\sigma - \tau) \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \tau}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial u} - \frac{\partial \sigma}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial v} = 0$$

Condition d'intégrabilité de y :

$$(48) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} + \frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial u} = 0$$

Condition d'intégrabilité de x :

$$(49) \quad (\sigma + \tau) \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial v} + 2\tau \frac{\partial L}{\partial v} \right) \frac{\partial p}{\partial u} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} + 2\sigma \frac{\partial L}{\partial u} \right) \frac{\partial p}{\partial v} = 0$$

Ces trois équations se réduisent à deux seulement, sinon elles n'admettraient pas d'autre solution que $p = \text{Cte}$, et non à une seule, sinon λ serait fonction de σ seul et r, s, t ne seraient aussi fonctions que d'un seul argument, d'où la condition :

$$(50) \quad \begin{vmatrix} \tau - \sigma & \frac{\partial \tau}{\partial v} & -\frac{\partial \sigma}{\partial u} \\ 1 & \frac{\partial L}{\partial u} & \frac{\partial L}{\partial v} \\ \tau + \sigma & \frac{\partial \tau}{\partial v} + 2\tau \frac{\partial L}{\partial v} & \frac{\partial \sigma}{\partial u} + 2\sigma \frac{\partial L}{\partial u} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{ou } \frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial L}{\partial v} = - \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v}}{(\tau - \sigma)^2}$$

$$\text{On obtient alors : } \frac{\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial p}{\partial u}} = - \frac{\frac{\partial \tau}{\partial v}}{\tau - \sigma} - \frac{\partial L}{\partial v}$$

$$\text{En intégrant : } \text{Log } \frac{\partial p}{\partial u} = -L - \int \frac{d\tau}{\tau - \sigma}$$

$$\text{De même : } \frac{\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial p}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial \tau}{\partial u}}{\tau - \sigma} - \frac{\partial L}{\partial u}$$

$$\text{Et : } \text{Log } \frac{\partial p}{\partial v} = -L + \int \frac{d\sigma}{\tau - \sigma}$$

$$\text{Posons : } \int \frac{d\sigma}{\tau - \sigma} = -\text{Log } \psi(\sigma); \text{ alors : } \frac{1}{\tau - \sigma} = -\frac{\psi'}{\psi}$$

$$\text{et } \frac{\frac{d\tau}{d\sigma} - 1}{(\tau - \sigma)^2} = \frac{\psi''}{\psi} - \frac{\psi'^2}{\psi^2}, \text{ donc : } \frac{\frac{d\tau}{d\sigma}}{(\tau - \sigma)^2} = \frac{\psi''}{\psi} \text{ et}$$

$$\frac{\frac{d\tau}{d\sigma}}{\tau - \sigma} = \frac{\psi''}{\psi'}$$

Nous obtenons alors :

$$(51) \quad \begin{cases} \text{Log } \frac{\partial p}{\partial u} = -L + \text{Log } \psi' \\ \text{Log } \frac{\partial p}{\partial v} = -L - \text{Log } \psi \end{cases} \quad (51') \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial u} = \psi' e^{-L} \\ \frac{\partial p}{\partial v} = \frac{1}{\psi} e^{-L} \end{cases}$$

La condition d'intégrabilité de p donne une 1ère équation :

$$(52) \quad \psi' \frac{\partial \sigma}{\partial v} - \psi \frac{\partial L}{\partial v} = - \frac{\psi'}{\psi^2} \frac{\partial \sigma}{\partial u} - \frac{1}{\psi} \frac{\partial L}{\partial u}$$

D'autre part, en remplaçant $\frac{\partial p}{\partial u}$, $\frac{\partial p}{\partial v}$ par leurs valeurs (51') dans le système (47), (48), (49), on trouve une deuxième équation :

$$(53) \quad \left(- \frac{\psi}{\psi'} \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right) \frac{1}{\psi^2} = - \frac{\psi''}{\psi'} \frac{\partial \sigma}{\partial v} + \frac{\partial L}{\partial v}$$

Ces deux équations permettent de calculer $\frac{\partial L}{\partial u}$, $\frac{\partial L}{\partial v}$:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \psi \psi'' \frac{\partial \sigma}{\partial v}, \quad \frac{\partial L}{\partial v} = - \frac{1}{\psi^2} \frac{\partial \sigma}{\partial u}$$

On en déduit la condition d'intégrabilité de L :

$$(54) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\psi^2} \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\psi \psi'' \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) = 0$$

Considérons d'autre part le ds^2 d'une surface applicable sur un plan et rapporté à deux directions orthogonales u et v; il s'écrira : $ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2$, avec la condition :

$$(55) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial C}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{C} \frac{\partial A}{\partial v} \right) = 0$$

qui exprime que la courbure totale est nulle.

Nous identifierons l'équation (54) à l'équation

$$(55), \text{ en posant : } \begin{aligned} A &= \psi - \frac{\sigma}{\psi} \psi' \\ C &= 1 \frac{\sigma}{\psi} \end{aligned}$$

Nous écrirons encore le ds^2 :

$$ds^2 = \frac{1}{\omega^2} du^2 + \frac{1}{\psi^2(\omega)} dv^2 = 4dx dy$$

On en déduit :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1 \frac{\psi}{\omega} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \frac{\psi}{\omega} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \omega^2$$

La condition d'intégrabilité de v donne :

$$(56) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\omega \psi' + \psi}{\omega \psi^2 - \psi} = 0$$

En appliquant la transformation de LEGENDRE à cette équation, il vient :

$$(57) \quad RX^2 + TY^2 - 2SKY \phi(XY) = 0$$

où $\phi(u^2) = \frac{\omega\varphi' + \varphi}{\omega\varphi' - \varphi}$, puisque $XY = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = u^2$

Les caractéristiques de (57) sont définies par :

$$(58) \quad X^2 dy^2 + 2XY \phi(XY) dx dy + Y^2 dx^2 = 0$$

Posant $XY = \chi$, et désignant les variables caractéristiques par α et β , on trouve :

$$(59) \quad \begin{cases} \alpha = \text{Log } X - \int \frac{d\chi}{\chi [1 - \phi + \sqrt{\phi^2 - 1}]} = \text{Log } X - \int \left(\frac{1}{\omega} + \sqrt{\frac{\varphi'}{\omega\varphi}} \right) d\omega \\ \beta = \text{Log } X - \int \frac{d\chi}{\chi [1 - \phi - \sqrt{\phi^2 - 1}]} = \text{Log } X - \int \left(\frac{1}{\omega} - \sqrt{\frac{\varphi'}{\omega\varphi}} \right) d\omega \end{cases}$$

$$\text{D'où } \frac{\beta - \alpha}{2} = \int \frac{\sqrt{\varphi'}}{\omega\varphi} d\omega$$

Donc ω est une fonction de $\alpha - \beta$.

L'équation en Z , où $Z = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$, est :

$$(60) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{8} \frac{\omega(\varphi'^2 + \varphi\varphi'') - \varphi\varphi'}{\varphi' \sqrt{\omega\varphi\varphi'}} \left(\frac{\partial Z}{\partial \alpha} - \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) = 0$$

obtenue en prenant comme variables α et β au lieu de X et Y , dans l'équation (57). L'équation (60) est une équation à invariants égaux, puisque ω est une fonction de $\alpha - \beta$. Si on fait le changement de variable, d'ailleurs

classique, $Z = \Lambda \theta$, avec $\text{Log } \Lambda = -\frac{1}{8} \int \frac{\omega(\varphi'^2 + \varphi\varphi'') - \varphi\varphi'}{\varphi' \sqrt{\omega\varphi\varphi'}} d(\alpha - \beta)$

l'équation (60) prend la forme : (61) $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = F(\alpha - \beta) \theta$

$$\text{avec } F = -\frac{\Lambda'}{\Lambda} + 2 \frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}$$

C'est une équation harmonique particulière, qui s'intègre partiellement à l'aide d'intégrales définies, quand on a la solution générale de $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \lambda^2} = -[F(\lambda) + H]\sigma$ où H est un paramètre (1).

En résumé, étant donnée une équation (41),

1°) on déterminera σ et τ par $\frac{s}{r} = \frac{\tau + \tau'}{2}$ et $\frac{t}{r} = \sigma - \tau'$. On aura ainsi déterminé τ en fonction de σ .

2°) On calculera ψ par $\frac{d\sigma}{\tau - \sigma} = -\text{Log } \psi(\sigma)$

3°) On calculera $\omega = \frac{1}{\psi - \sigma \psi'}$, $\psi(\omega) = 1 \frac{\psi}{\sigma}$

4°) on intégrera l'équation harmonique : $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \lambda \partial \beta} = F(\lambda - \beta)$

avec $F = -\frac{\Lambda''}{\Lambda} + 2 \frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}$

$$\text{Log } \Lambda = -\frac{1}{8} \int \frac{\omega(\psi'' + 4\psi') - 4\psi'}{4\psi\omega\psi'} d(\lambda - \beta)$$

$$\text{et } \lambda - \beta = -2 \int \sqrt{\frac{\psi'}{\omega\psi}} d\omega$$

5°) On calculera $Z = \Lambda \theta$

$$X = e^{\alpha + \int (\frac{1}{\omega} + \sqrt{\frac{\psi'}{\omega\psi}}) d\omega}$$

$$Y = \frac{\omega^2}{X}, \text{ puis } P = \frac{\partial Z}{\partial X}, Q = \frac{\partial Z}{\partial Y}$$

6°) On appliquera la transformation de LEGENDRE à X, Y, Z, P, Q; ce qui donnera $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, $u = PX + QY - Z$, x, y .

7°) On calculera v par $\frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\psi}{\omega} \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = i \frac{\psi}{\omega} \frac{\partial u}{\partial y}$

8°) On calculera L, p, q, y, z par intégration :

$$dL = \psi \psi' \frac{\partial \tau}{\partial v} du - \frac{1}{4} \frac{\partial \tau}{\partial u} dv$$

$$dp = e^{-L} (\psi' du + \frac{dv}{\psi})$$

(1) V. DARBOUX Théorie des Surfaces II livre IV ch. IX

$$\begin{aligned}
 dq &= e^{-L} \left[(\sigma \psi' - \psi) du + \frac{\sigma}{\psi} dv \right] \\
 dx &= e^L \left[-(\sigma \psi' - \psi) du + \frac{\sigma}{\psi} dv \right] \\
 dy &= e^L \left(\psi' du - \frac{dv}{\psi} \right) \\
 dz &= p dx + q dy
 \end{aligned}$$

35.- Cas particuliers.

Des formules donnant A et C en ψ et σ on déduit inversement :

$$\frac{1}{\sigma} = -1 \int \frac{dC}{AC^2}, \quad \frac{1}{\psi} = -C \int \frac{dC}{AC^2} \quad \tau = \frac{iAC}{1 + AC \int \frac{dC}{AC^2}}$$

On pourra ainsi passer de A et C aux coordonnées cartésiennes.

1°) Le plan est rapporté à des coniques géodésiques :

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{C^2} = 1$$

On en déduit : $\omega^2 + \psi^2 = 1$

On posera donc : $\omega = \cos \varphi$, $\psi = \sin \varphi$

Pour trouver l'équation (41), on éliminera ψ entre :

$$\frac{4(s^2 - rt)}{t^2} = -\omega^2 \psi^2$$

$$\frac{2is}{t} = \omega \psi - 2 \int \omega d\psi$$

Après un calcul élémentaire, on trouve :

$$(62) \quad \frac{4}{t} \sqrt{s^2 - rt} = \text{sh} \left(\frac{4s}{t} \right)$$

L'équation harmonique que vérifie Z, se réduit simplement à

$$(63) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$$

2°) Cas où $AC = 1$.

Posant $A^2 = \omega$, il s'agit de déterminer u, v, ω tels que :

$$\omega du^2 + \frac{1}{\omega} dv^2 = dx dy$$

u et v vérifient le système : $\frac{\partial v}{\partial x} = i\omega \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -i\omega \frac{\partial u}{\partial y}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\omega}$$

La condition d'intégrabilité de v s'écrit :

$$(64) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

En remplaçant ω par sa valeur $\frac{1}{2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}}$, il vient :

$$(65) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

On applique ici aussi une transformation de LEGENDRE;

l'équation précédente s'écrit :

$$(66) \quad R X^2 + T Y^2 = 0$$

dont les caractéristiques sont (67) $X^2 dy^2 + Y^2 dx^2 = 0$

et les variables caractéristiques :

$$(68) \quad \begin{aligned} \alpha &= \text{Log } Y - i \text{Log } X \\ \beta &= \text{Log } Y + i \text{Log } X \end{aligned}$$

Inversement:

$$\begin{aligned} X &= e^{i \frac{\alpha - \beta}{2}} & P &= \frac{1}{X} \left(\frac{\partial Z}{\partial \alpha} - \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) \\ Y &= e^{i \frac{\alpha + \beta}{2}} & Q &= \frac{1}{Y} \left(\frac{\partial Z}{\partial \alpha} + \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) \end{aligned}$$

où Z vérifie l'équation :

$$(69) \quad 4 \frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha \partial \beta} - (1+i) \frac{\partial Z}{\partial \beta} - (1-i) \frac{\partial Z}{\partial \alpha} = 0$$

équation de LAPLACE à invariants égaux.

Comme dans le cas général, on posera : $Z = \Lambda \Theta$

$$\text{avec } \text{Log } \Lambda = -\frac{1}{4} \left[\alpha(1+i) + \beta(1-i) \right]$$

$$\text{satisfait à : } (70) \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{8} \Theta$$

C'est l'équation dite "des télégraphistes", dont l'intégrale est connue.

En utilisant les formules données au début du présent N^o, on établit l'équation aux dérivées partielles (41), que vérifient les surfaces (S). On trouve par un calcul facile :

$$(71) \quad 4(s^2 - rt) + t^2 = 0$$

3^o) Cas où $A = C^m$, $m \neq -1$

On posera $\phi = C^2$. Le calcul se fait de la même manière que pour le cas précédent. θ est donné par :

$$(72) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial \beta} = \frac{(m-1)^2}{(8m)^2} \frac{1}{x \beta} \theta$$

En posant $\lambda_1 = \frac{4m}{m-1} \lambda^2$, $\beta_1 = \frac{4m}{m-1} \beta^2$, on trouve

$$(73) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \lambda \partial \beta} = \theta$$

L'équation aux dérivées partielles des surfaces (S) est : (74) $4ms^2 + rt(m-1)^2 = 0$

36.- Equation non homogène.

LEGENDRE, dès 1787, avait proposé comme méthode de résolution, de prendre comme inconnue auxiliaire $q = \frac{\partial z}{\partial y}$

Soit donc l'équation :

$$(75) \quad r = f(s, t)$$

En la dérivant par rapport à y , il vient :

$$(76) \quad \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}$$

C'est une équation linéaire, de la forme $r + As + Bt = 0$, à condition de lui appliquer une transformation de LEGENDRE, ce qui revient à prendre comme fonction inconnue :

$u = q - sx - ty$ et s et t comme variables indépendantes.

On obtient alors l'équation :

$$(77) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0$$

qui est bien de la forme annoncée et où les coefficients $\frac{\partial f}{\partial s}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$ ne dépendent que des variables indépendantes.
(V. §4 N^o28)

On a également cherché des cas où le système différentiel des caractéristiques admet une deuxième intégrale première. Il s'écrit en effet :

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} dy = m_1 dx \\ dz = (p + qm_1) dx \\ dp = (f + sm_1) dx \quad (78') \\ dq = (s + tm_1) dx \\ ds + m_2 dt = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} dy = m_2 dx \\ dz = (p + qm_2) dx \\ dp = (f + sm_2) dx \\ dq = (s + tm_2) dx \\ ds + m_2 dt = 0 \end{array} \right.$$

où m_1 et m_2 sont les racines de l'équation caractéristique:

$$(79) \quad m^2 + m \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

et ne dépendent que de s et t ; les dernières équations (78) et (78') sont donc des équations différentielles ordinaires et donnent une combinaison intégrable pour chaque système.

Soit donc $u(s, t) = C$ l'intégrale de :

$$ds + m_2 dt = 0$$

u est donc une intégrale de :

$$(80) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - m_2 \frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

Pour trouver une autre intégrale première, on remarque que, si m_1 , $f + sm_1$, ou $s + tm_1$ satisfont à (80), on a une seconde intégrale : $y - m_1 x = C$, $p - (f + sm_1)x = C$, $q - (s + tm_1)x = C$, respectivement.

Cette méthode nous conduit donc à trois cas où l'équation (75) est intégrable par la méthode de DARBOUX.

37.- Voyons quel progrès la méthode de DRACH apporte à la solution de l'équation (75). Le système (1) s'écrit :

$$dz - p dx - q dy = 0$$

$$dp - f dx - s dy = 0$$

$$dq - s dx - t dy = 0$$

$$(12) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - m_1 \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0 & \frac{\partial y}{\partial \beta} - m_2 \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial \alpha} + m_2 \frac{\partial t}{\partial \alpha} = 0 & \frac{\partial s}{\partial \beta} + m_1 \frac{\partial t}{\partial \beta} = 0 \\ (X) \frac{\partial}{\partial \beta} (m_1 \frac{\partial x}{\partial \beta}) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (m_2 \frac{\partial x}{\partial \beta}) \\ (T) \frac{\partial}{\partial \beta} (m_2 \frac{\partial t}{\partial \alpha}) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (m_1 \frac{\partial t}{\partial \alpha}) \end{array} \right.$$

Les variables d'AMPERE α et β sont définies par les intégrales des deux équations :

$$ds + m_2 dt = 0$$

$$ds + m_1 dt = 0$$

$$\text{nous poserons } ds + m_2 dt = M_2 d\alpha$$

$$ds + m_1 dt = M_1 d\beta$$

Les variables α et β sont ainsi définies en fonction de s et t . Inversement, on pourra exprimer s et t en fonction de α et β , puis m_1 et m_2 en fonction des mêmes variables.

Dans ces conditions, les équations (X) et (T) sont des équations de LAPLACE et la solution de l'équation (75) est ramenée à l'étude des équations de LAPLACE (X) et (T).

Une transformation habile a permis à DRACH de ramener l'étude de ces équations à celle du système :

$$(\Delta) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial \beta} = \lambda v \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} = \lambda u \end{array} \right.$$

dans lequel u et v sont solution de deux équations de LAPLACE, dont l'une est l'adjointe de l'autre.

On pose, en appliquant ici aussi, la transformation de LEGENDRE :

$$Z = z - (px + qy) + \frac{1}{2} (rx^2 + 2sxy + ty^2)$$

$$P = rx + sy - p$$

$$Q = sx + ty - q$$

Le système (Ω) devient :

$$2dz = xdP + ydQ$$

$$dP = xdr + yds$$

$dQ = xds + ydt$, les autres équations n'étant pas changées.

Calculons dZ :

$$2dZ = x^2 dr + 2xy ds + y^2 dt$$

$$= (x^2 \frac{\partial r}{\partial \alpha} + 2xy \frac{\partial s}{\partial \alpha} + y^2 \frac{\partial t}{\partial \alpha}) d\alpha + (x^2 \frac{\partial r}{\partial \beta} + 2xy \frac{\partial s}{\partial \beta} + y^2 \frac{\partial t}{\partial \beta}) d\beta$$

$$\text{Or : } \frac{\partial r}{\partial \alpha} = -m_2 \frac{\partial s}{\partial \alpha} = m_2 \frac{\partial t}{\partial \alpha} \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial \beta} = -m_1 \frac{\partial s}{\partial \alpha} = m_1 \frac{\partial t}{\partial \alpha}$$

$$\text{donc : } 2dZ = (y - m_2 x)^2 \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2} d\alpha + (y - m_1 x)^2 \frac{\partial^2 t}{\partial \beta^2} d\beta$$

Ce qui donne $\frac{\partial Z}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial Z}{\partial \beta}$. En dérivant la première par rapport à β et la deuxième par rapport à α , on en déduit deux valeurs de $\frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha \partial \beta}$.

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha \partial \beta} &= (y - m_2 x)^2 \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} - 2(y - m_2 x) x \frac{\partial m_2}{\partial \beta} \frac{\partial t}{\partial \alpha} \\ &= 2 \frac{\frac{\partial Z}{\partial \alpha}}{\frac{\partial t}{\partial \alpha}} \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} - 2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\frac{\partial Z}{\partial \alpha}}{\frac{\partial t}{\partial \alpha}} \right) \frac{\partial t}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ) \quad 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha \partial \beta} &= (y - m_1 x)^2 \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} - 2(y - m_1 x) x \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \frac{\partial t}{\partial \beta} \\ &= 2 \frac{\frac{\partial Z}{\partial \beta}}{\frac{\partial t}{\partial \beta}} \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} - 2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\frac{\partial Z}{\partial \beta}}{\frac{\partial t}{\partial \beta}} \right) \frac{\partial t}{\partial \beta} \end{aligned}$$

En multipliant membre à membre les deux valeurs trouvées pour $\frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha \partial \beta}$, on en déduit :

$$(81) \quad \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial \beta}}{\sqrt{\frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{\partial z}{\partial \beta}}} = \frac{\frac{\partial^2 t}{\partial \lambda \partial \beta}}{\sqrt{\frac{\partial t}{\partial \lambda} \frac{\partial t}{\partial \beta}}}$$

Comme t est donné en fonction de λ et β , nous poserons :

$$\frac{\frac{\partial^2 t}{\partial \lambda \partial \beta}}{\sqrt{\frac{\partial t}{\partial \lambda} \frac{\partial t}{\partial \beta}}} = 2 \lambda (\lambda, \beta)$$

L'équation (81) prend la forme $s^2 = 4 \lambda pq$.

Posant avec GOURSAT, $\frac{\partial z}{\partial \lambda} = u^2$, $\frac{\partial z}{\partial \beta} = v^2$, on obtient:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial \beta} = 2u \frac{\partial u}{\partial \beta} = 2v \frac{\partial v}{\partial \lambda} = 2 \lambda uv$$

et l'équation (81) se ramène au système (Δ) . (1)

(1) GOURSAT (Bulletin de la Sté Math. de France 1897-1900) donne la solution suivante de la question: l'équation (1) $s^2 - 4 pq = 0$ se ramène à une équation linéaire qui se rapproche des équations à invariants égaux.

on pose $p = u^2$
 $q = v^2$ et

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\lambda} v \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \sqrt{\lambda} u \end{cases}$$

D'où (3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \text{Log } \lambda}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda u = 0$ et l'équation analogue pour v .

Si u est une intégrale de (3), on a celle de (1) par quadratures:

$$z = \int u^2 dx + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy$$

On est donc ramené à l'étude de l'équation (3). Quels sont ses invariants ?

$h = \lambda$, $k = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \text{Log } \lambda}{\partial x \partial y} + \lambda$. Après une transformation

de LAPLACE, on obtient : $h_1 = k$, $k_1 = h$. on a donc obtenu l'équation adjointe.

D'où la conclusion: à toute équation (3) intégrable par la méthode de LAPLACE, correspond une équation (1) intégrable par quadratures. pour déterminer λ afin que l'équation (3) soit intégrable, il faut trouver toutes les suites de LAPLACE terminées dans les deux sens et composées d'un nombre pair d'équations et telles que les deux sens et composées d'un nombre pair d'équations et telles que les deux

Si, au lieu d'éliminer $\frac{\partial r}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial r}{\partial \beta}$, $\frac{\partial s}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial s}{\partial \beta}$, des équations qui donnent $\frac{\partial Z}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial Z}{\partial \beta}$, on voit, en éliminant $\frac{\partial s}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial s}{\partial \beta}$, $\frac{\partial t}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial t}{\partial \beta}$ que Z vérifie la même équation (81) où on a remplacé t par r; r est donc aussi une solution de l'équation :

$$\frac{(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta})^2}{4 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \beta}} = \lambda^2 (\alpha, \beta)$$

En résumé, on opérera de la manière suivante pour résoudre les équations (75) :

1°) On détermine α et β en s et t, puis on fait l'inversion, qui donne s et t puis r en α et β .

2°) on calcule : $\frac{\frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta}}{2 \sqrt{\frac{\partial t}{\partial \alpha} \frac{\partial t}{\partial \beta}}} = \lambda (\alpha, \beta)$

3°) On calcule $dt = u_1^2 d\alpha + v_1^2 d\beta$
 $dr = u_2^2 d\alpha + v_2^2 d\beta$

D'autre part, comme

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{\partial r}{\partial \alpha} \frac{\partial t}{\partial \alpha}} \text{ et } \frac{\partial s}{\partial \beta} = \sqrt{\frac{\partial r}{\partial \beta} \frac{\partial t}{\partial \beta}}$$

$$ds = u_1 u_2 d\alpha + v_1 v_2 d\beta$$

4°) Soit u, v la solution générale du système (Δ), dont u_1, v_1 et u_2, v_2 sont des solutions particulières, on a :

$$dZ = \frac{1}{2} (u^2 d\alpha + v^2 d\beta)$$

qui donne Z par quadratures. Puis x et y sont donnés par le système algébrique :

(1) suite - équations à égale distance des extrêmes aient les mêmes invariants en ordre inverse.

Exemples: 1°) $\lambda = 1$: l'équation (1) se ramène à $s=z$

2°) $\lambda = \frac{k^2}{(x+y)^2}$, où K est un entier. Pour $\lambda=1$, on obtient:

$u=X'+\frac{Y-X}{x+y}$, $v=Y'+\frac{X-Y}{x+y}$. Posant $X'=\alpha$, $Y'=\beta$, $x=\psi''(\alpha)$,

$y=\psi'(\beta)$ on trouve :

$$z = \alpha^2 \psi'' - 2\alpha \psi' + 2\beta + \beta^2 \psi'' - 2\beta \psi' + 2\psi - \frac{\alpha \psi'' - \psi' - \beta \psi'' + \psi'}{\psi'' + \psi''}$$

$$(82) \left\{ \begin{array}{l} y - m_2 x = 2 \sqrt{\frac{\frac{\partial Z}{\partial x}}{\frac{\partial t}{\partial \alpha}}} = \sqrt{\frac{u^2}{u_1^2}} = \frac{u}{u_1} \\ \text{avec } m_2 = \frac{\frac{\partial r}{\partial x}}{\frac{\partial s}{\partial \alpha}} = - \frac{u_2}{u_1} \\ \\ y - m_1 x = 2 \sqrt{\frac{\frac{\partial Z}{\partial \beta}}{\frac{\partial t}{\partial \beta}}} = \sqrt{\frac{v^2}{v_1^2}} = \frac{v}{v_1} \\ \text{avec } m_1 = \frac{\frac{\partial r}{\partial \beta}}{\frac{\partial s}{\partial \beta}} = - \frac{v_2}{v_1} \end{array} \right.$$

La solution de ce système est : $x = \frac{uv_1 - vu_1}{u_2 v_1 - u_1 v_2}$

$$y = \frac{uv_2 - vu_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1}$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de dp et dq , on a : $dp = u_2(xu_2 + yu_1) d\alpha + v_2(xv_2 + yv_1) d\beta =$
 $= uu_2 d\alpha + vv_2 d\beta$

$$dq = u_1(xu_2 + yu_1) d\alpha + v_1(xv_2 + yv_1) d\beta = uu_1 d\alpha + vv_1 d\beta$$

qui donnent aussi P et Q par quadratures. Enfin :

$$p = rx + sy - P, \quad q = sx + ty - Q, \quad z = Z - Px - Qy + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2)$$

Remarque : On peut partir d'une fonction donnée $\lambda(\alpha, \beta)$. Deux solutions particulières du système (Δ) $u_1, v_1; u_2, v_2$ donnent r, s, t par quadratures à partir des relations aux différentielles totales obtenues. On en déduit alors une équation (75) $r = f(s, t)$, dont la solution est donnée par la solution générale u, v du système (Δ) . Dans ce cas, f dépend de quatre fonctions arbitraires, deux de α , deux de β .

38- Exemple : Posons $\lambda = \frac{1}{\alpha + \beta}$

L'intégration du système (A) donne (voir Note pp. 57, 58)

$$u = \frac{F(\alpha) + G(\beta)}{\alpha + \beta} - F'(\alpha)$$

$$v = \frac{F_1(\alpha) + G_1(\beta)}{\alpha + \beta} - G'_1(\beta)$$

Prenons deux solutions particulières :

$$1^\circ) F = F_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad G = G_1 = \frac{1}{\beta}$$

$$\text{On en déduit : } u_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha^2 \beta}, \quad v_1 = \frac{\beta - \alpha}{\beta^2 \alpha}$$

$$2^\circ) F = F_1 = \alpha^2, \quad G = G_1 = \beta^2$$

$$\text{On en déduit : } u_2 = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2}{\alpha + \beta}, \quad v_2 = \frac{\beta^2 + 2\alpha\beta - \alpha^2}{\alpha + \beta}$$

Puis $dr = u_2^2 d\alpha + v_2^2 d\beta$, dont l'intégration donne :

$$r = \frac{1}{3} (\alpha + \beta)^3 - \frac{4\alpha^2\beta^2}{\alpha + \beta}$$

De même : $dt = u_1^2 d\alpha + v_1^2 d\beta$, dont l'intégration donne :

$$t = \frac{(\alpha - \beta)^3}{3\alpha^3\beta^3}$$

Enfin, $ds = u_1 u_2 d\alpha + v_1 v_2 d\beta$ et

$$s = 4 \log \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta}$$

On a ainsi une représentation paramétrique de l'équation (75) en fonction des deux paramètres α et β .

Puis Z est donné par: $dZ = \frac{1}{2} (u^2 d\alpha + v^2 d\beta)$

Pour intégrer cette équation, nous prendrons (voir même note) $F'(\alpha)$ et $G'_1(\beta)$ comme variables indépendantes au lieu de α et β et nous poserons $\alpha = \varphi(F')$

$$\beta = \psi(G'_1)$$

CHAPITRE III

INVARIANTS ET INVOLUTIONS DE

l'EQUATION $s = f(x, y, z, p, q)$

§1. Invariants entiers.

39. DRACH a su aussi renouveler la méthode de DARBOUX, qui s'était révélée si fructueuse entre les mains de ses successeurs: GOURSAT, GOSSE, MM. GAU et LAINE. En l'occurrence, la méthode de DRACH est ici une méthode de récurrence, qui permet d'étudier les invariants d'ordre n , alors que la méthode de GOURSAT ne se prête pas à ce genre de généralisation, et n'a guère permis de dépasser le second ou le troisième ordre.

Soit donc l'équation :

$$(1) \quad s = f(x, y, z, p, q),$$

pour laquelle les variables caractéristiques λ et μ sont ici simplement x et y , et qui possède évidemment des caractéristiques du 1er ordre.

Les équations des caractéristiques sont :

$$(2) \quad \begin{array}{ll} dx = 0 & dy = 0 \\ dp = fdy & (2') \quad dq = fdx \end{array}$$

Les éléments paramétriques sont donc x, y, z, p, q et les dérivées successives de p par rapport à x et celles de q par rapport à y . Nous les désignerons, conformément aux considérations de "poids" vues précédemment (ch. II §3), par :

$$\begin{array}{ll} p_1 = \frac{\partial p}{\partial x}, & p_2 = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \dots, p_n = \frac{\partial^n p}{\partial x^n}, \dots \\ q_1 = \frac{\partial q}{\partial y}, & q_2 = \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}, \dots, q_n = \frac{\partial^n q}{\partial y^n}, \dots \end{array}$$

Un invariant d'ordre n relatif à la caractéristique x , s'écrira :

$$(3) \quad \Psi(x, y, z, p, p_1, \dots, p_n) = F(x)$$

Il devra former avec l'équation proposée (1) un système complètement intégrable.

Nous écrirons : $\left[\frac{d\psi}{dy} \right] = 0$

où les éléments non paramétriques seront calculés à partir des équations (2).

40.- Nous supposons que ψ est l'invariant d'ordre minimum relatif à la caractéristique x . Nous avons vu qu'on peut supposer ψ linéaire en p_n . Comme il doit rester invariant en forme pour toute transformation ponctuelle opérée sur x, y, z , tous ses termes sont au plus de poids n , si l'on affecte les p_i d'un poids égal à leur indice (1). Nous écrirons donc :

$$(4) \quad \psi = \lambda p_n + \Lambda_1 p_1 p_{n-1} + \dots$$

où $\lambda, \Lambda_1, \dots$ ne dépendent que de x, y, z, p .

En identifiant à zéro $\left[\frac{d\psi}{dy} \right]$, c'est à dire en annulant les coefficients des éléments paramétriques, on obtient des équations qui permettent de calculer $\lambda, \Lambda_1, \dots$

41.- Faisons ce calcul :

$$\left[\frac{d\psi}{dy} \right] = \frac{d\lambda}{dy} p_n + \lambda \frac{dp_n}{dy} + \dots$$

$$\text{Or : } \frac{dp}{dy} = f, \quad \frac{dp_1}{dy} = \left[\frac{df}{dx} \right] = \frac{\partial f}{\partial p} p_1 + \left(\frac{df}{dx} \right), \dots, \quad \frac{dp_n}{dy} = \frac{\partial f}{\partial p} p_n + \dots$$

Le coefficient du terme en p_n est donc : $\frac{d\lambda}{dy} + \frac{\partial f}{\partial p} \lambda$

λ est donc déterminé par :

$$(5) \quad \frac{d\lambda}{dy} + \frac{\partial f}{\partial p} \lambda = 0$$

$$\text{ou, en développant : } \frac{\partial \lambda}{\partial y} + q \frac{\partial \lambda}{\partial z} + f \frac{\partial \lambda}{\partial p} + \lambda \frac{\partial f}{\partial p} =$$

$$\text{nous poserons : } (6) \quad \lambda = \frac{\partial \phi}{\partial p}$$

où ϕ est une nouvelle fonction de x, y, z, p . On peut alors intégrer l'équation (5) par rapport à p . La constante

(1) C'est, on l'a vu, la raison pour laquelle nous avons modifié la notation classique.

d'intégration est ici une fonction de x, y, z, q :

$$(7) \frac{\partial \theta}{\partial y} + q \frac{\partial \theta}{\partial z} + f \frac{\partial \theta}{\partial p} = \mu(x, y, z, q)$$

Cette équation donne f à l'aide de deux fonctions arbitraires de quatre arguments : $\theta(x, y, z, p)$ et $\mu(x, y, z, q)$, pour toutes les équations (1), qui admettent un invariant entier.

$$f = \frac{\mu - \frac{\partial \theta}{\partial y} - q \frac{\partial \theta}{\partial z}}{\frac{\partial \theta}{\partial p}}$$

Or, d'après (1), $s = f$: donc le premier membre de (7) est $\frac{d\theta}{dy}$. Nous écrirons dans la suite l'équation (1) sous la forme :

$$(8) \frac{d\theta}{dy} = \mu$$

Remarques : 1°) Si on ajoute à θ une fonction $a(x, y, z)$ il faut ajouter à μ $\frac{da}{dy} = \frac{\partial a}{\partial y} + q \frac{\partial a}{\partial z}$.

2°) Si on remplace θ par $X\theta + X_1$ où X et X_1 sont des fonctions de x , μ est multiplié par X .

D'autre part, ψ s'écrit : $\psi = \frac{\partial \theta}{\partial x} p_n + \dots$

Or $\frac{\partial \theta}{\partial p} p_n$ est le premier terme de $\frac{d^n \theta}{dx^n}$. Nous écrirons donc :

$$(9) \psi = \frac{d^n \theta}{dx^n} + A_1 \frac{d\theta}{dx} \frac{d^{n-1} \theta}{dx^{n-1}} + \dots + A_n \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^n + \dots$$

où les termes sont de poids n ou inférieur à n , $\frac{d^k}{dx^k}$ étant le poids k .

De (8), on déduit : $\frac{d^{n+1} \theta}{dy dx^n} = \frac{d^n \mu}{dx^n}$

La condition $\left[\frac{d\psi}{dy} \right] = 0$, où ψ a la forme (9), s'écrit:

$$(10) \frac{d^{n+1} \theta}{dx^n dy} + A_1 \left(\frac{d^2 \theta}{dx dy} \frac{d^{n-1} \theta}{dx^{n-1}} + \frac{d\theta}{dx} \frac{d^n \theta}{dx^{n-1} dy} \right) + \frac{dA_1}{dy} \frac{d\theta}{dx} \frac{d^{n-1} \theta}{dx^{n-1}} + \dots = 0$$

Les opérateurs $\frac{d^n}{dx^n}$ et $\frac{d}{dy}$ sont permutables, donc

(10) devient :

$$(11) \frac{d^n u}{dx^n} + A_1 \left(\frac{d\mu}{dx} \frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}} + \frac{d\theta}{dx} \frac{d^{n-1}\mu}{dx^{n-1}} \right) + \frac{dA_1}{dy} \frac{d\theta}{dx} \frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}} + \dots = 0$$

Au lieu de considérer la fonction $\theta = \theta(x, y, z, p)$, nous allons prendre p comme fonction et θ comme variable :

$$(12) \quad p = p(x, y, z, \theta)$$

Les dérivées se calculeront à l'aide des égalités suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} = 1$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

et les égalités analogues à la deuxième où l'on remplace x par y et z successivement.

Calculons $\frac{dp}{dy}$, il vient :

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\partial p}{\partial y} + q \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{d\theta}{dy} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

Or : $\frac{dp}{dy} = s$, et, d'après (8), $\frac{d\theta}{dy} = \mu$.

Donc l'égalité précédente s'écrit :

$$(13) \quad \frac{dp}{dy} = \frac{\partial p}{\partial y} + q \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial p}{\partial \theta} = f$$

et remplace l'équation proposée sous la forme (1) ou (8).

On fera le changement de variable également dans (11) : on calculera au préalable :

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial \mu}{\partial x} + p \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{dp}{dy} \frac{\partial \mu}{\partial q} = \mu_1$$

$$\frac{d^2 \mu}{dx^2} = \frac{d\mu_1}{dx} = \frac{\partial \mu_1}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dx} + \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + p \frac{\partial \mu_1}{\partial z} + \frac{dp}{dy} \frac{\partial \mu_1}{\partial q}$$

.....; Quand on aura remplacé $\frac{d\mu}{dx}$, $\frac{d^2 \mu}{dx^2}$, ..., $\frac{d^n \mu}{dx^n}$ par les valeurs précédentes dans (11), cette égalité devra être identiquement vérifiée, quels que soient $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{d^2 \theta}{dx^2}$,, $\frac{d^{n-1} \theta}{dx^{n-1}}$. Ces dernières expressions remplacent les p_i comme éléments paramétriques. L'identification en question permettra de calculer les coefficients A_k en fonction de x, y, z, θ .

42.- Invariant du second ordre.

L'équation étant écrite sous la forme (13), l'invariant est ici :

$$(14) \quad \varphi = \frac{d\theta}{dx} + \sigma = F(x)$$

La condition d'existence est :

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d^2\theta}{dx dy} + \frac{d\sigma}{dy} = 0$$

ou: (15)
$$\frac{d\mu}{dx} + \frac{d\sigma}{dy} = 0$$

où μ est une fonction de x, y, z, q ; σ , une fonction de x, y, z, θ , p étant aussi une fonction de x, y, z, θ .

Développée, l'équation (15) s'écrit :

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + p \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{dp}{dy} \frac{\partial \mu}{\partial q} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} + q \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \mu \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = 0$$

Si on la dérive par rapport à θ , en posant

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = p$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = \Sigma \quad \text{on a :}$$

$$(16) \quad p \frac{\partial \mu}{\partial z} + \left(\frac{\partial p}{\partial y} + q \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \mu}{\partial q} + \frac{\partial \Sigma}{\partial y} + q \frac{\partial \Sigma}{\partial z} + \mu \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} = 0$$

C'est cette équation qu'il s'agit de discuter. Nous supposons μ , P , Σ indépendants de x . Cette équation (16) est linéaire et homogène en P , Σ . La discussion s'ordonne par rapport à q , qui ne figure que dans μ et non dans P et Σ ; nous réintroduirons x en déduisant p et σ de P et Σ .

1°) μ non linéaire en q : Comme P et $\frac{\partial P}{\partial \theta}$ sont essentiellement différents de zéro, $\frac{\partial \mu}{\partial z}$ et $\mu \frac{\partial \mu}{\partial q}$, qui sont leurs coefficients, sont des combinaisons linéaires et non homogènes de q et μ , coefficients

Posons donc : (17) $\frac{\partial \mu}{\partial z} = a + bq + c\mu$

(18) $\mu \frac{\partial \mu}{\partial q} = a_1 + b_1 q + c_1 \mu$

où a, b, c, a_1, b_1, c_1 sont des fonctions de y et z .

En écrivant la condition d'intégrabilité $\frac{\partial^2 \mu}{\partial z \partial q} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial q \partial z}$

nous en déduisons :

$$(19) \quad b\mu^2 + c\mu(a_1 + b_1 q + c_1) = \mu \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{\partial b_1}{\partial z} q + \frac{\partial c_1}{\partial z} \mu \right) + c_1 \mu(a + bq + c\mu)$$

D'où, en procédant par identification, puisque μ dépend seul de q et z , non linéairement :

$$\begin{aligned} b + cc_1 &= \frac{\partial c_1}{\partial z} \\ 2ca_1 &= \frac{\partial a_1}{\partial z} \\ 2cb_1 &= \frac{\partial b_1}{\partial z} \\ aa_1 &= 0 \\ ab_1 + ba_1 &= 0 \\ bb_1 &= 0 \end{aligned}$$

On peut satisfaire les trois dernières équations de deux manières, soit en annulant a et b , soit en annulant a_1 et b_1 . La deuxième hypothèse est impossible, car dans ce cas, μ serait linéaire en q , ce qui est exclu. Donc :

$a=b=0$; puis $\frac{\partial \mu}{\partial z} = c\mu$

Nous poserons: $c = \frac{\partial \log \mu}{\partial z}$. D'où $\mu = \varphi(y, q) e^{C(y, z)}$

Ensuite (18) donne : $\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{1 + q + \varphi}{\varphi}$

C'est une équation différentielle ordinaire que l'on sait intégrer. On obtient, λ désignant un paramètre :

$$q + 1 = \frac{\lambda \sqrt{\lambda - 1}}{(\lambda - \frac{\sqrt{5}+1}{2}) \frac{\sqrt{5}+5}{10} (\lambda + \frac{\sqrt{5}-1}{2}) \frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

$$\Psi = \frac{Y}{\sqrt{\lambda-1} \left(\lambda - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\lambda + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

Puis μ est donné par : $\mu = \Psi e^{C(y,z)}$, où C est arbitraire.

2°) μ linéaire en q : Nous poserons $\mu = \mu_1 q + \mu_2$ et

l'équation (16) se décompose en deux :

$$(20) \quad \begin{cases} P \frac{\partial \mu_1}{\partial z} + \mu_1 \frac{\partial P}{\partial z} + \mu_1^2 \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial \Sigma}{\partial z} + \mu_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} = 0 \\ P \frac{\partial \mu_2}{\partial z} + \mu_1 \frac{\partial P}{\partial y} + \mu_1 \mu_2 \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial \Sigma}{\partial y} + \mu_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

En formant la condition d'intégrabilité de Σ , on obtient :

$$(22) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial y} - \frac{\partial \mu_2}{\partial z} \right) P \right] = \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial y} - \frac{\partial \mu_2}{\partial z} \right) \left(2\mu \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \right)$$

Il y a donc deux cas à considérer :

$$a) \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial y} = \frac{\partial \mu_2}{\partial z}. \text{ On posera } \mu = \frac{\partial v}{\partial y} + q \frac{\partial v}{\partial z}$$

le système (21) prend alors la forme :

$$(23) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\Sigma + \frac{\partial v}{\partial z} P \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\Sigma + \frac{\partial v}{\partial z} P \right) = 0 \end{cases}$$

Il en résulte que la fonction $\Sigma + \frac{\partial v}{\partial z} P$ est une fonction arbitraire de l'argument $v - \theta$: $\phi(v - \theta)$.

$$\text{D'où : } \Sigma = - \frac{\partial v}{\partial z} P + \phi(v - \theta)$$

En intégrant par rapport à θ et en réintroduisant la variable x :

$$(24) \quad \sigma = - \frac{\partial v}{\partial z} p + \psi(v - \theta, x)$$

La valeur ainsi obtenue de σ doit vérifier (15), qui s'écrit, après substitution de la valeur (24) de σ ; et toutes réductions faites :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + q \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\text{ou : } \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = 0. \quad v \text{ s'écrit donc : } v = v_1(y, z) + v_2(x)$$

b) $\frac{\partial \mu}{\partial y} \neq \frac{\partial \mu}{\partial z}$. Il y a alors trois équations (21) et (22)

pour déterminer la fonction Σ de trois variables y, z, θ . La seule solution possible est donc $\Sigma = \text{Cte}$. Ce cas est donc à écarter.

43.- Invariant au 3^e Ordre.

D'après le N^o 40, nous savons qu'il est de la forme:

$$\Psi(x) = \frac{d^2 \theta}{dx^2} + A \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 + B \frac{d\theta}{dx} + C$$

On peut, en multipliant θ par une fonction convenable de x , rendre le coefficient A constant. Deux cas se présentent suivant que cette constante est nulle ou non:

$$(I) \quad \Psi(x) = \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 + g \frac{d\theta}{dx} + 1$$

$$(II) \quad \Psi(x) = \frac{d^2 \theta}{dx^2} + g \frac{d\theta}{dx} + 1$$

I) En différentiant par rapport à y , il vient, en utilisant (8):

$$(25) \quad \frac{d\theta}{dx} \left[\frac{dg}{dy} - \frac{d\mu}{dx} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{d\mu}{dx} \right) \right] + \frac{dl}{dy} + g \frac{d\mu}{dx} + \frac{d^2 \mu}{dx^2} = 0$$

qui se décompose en deux, puisqu'elle doit être identiquement vérifiée :

$$(26) \quad \frac{dg}{dy} - \frac{d\mu}{dx} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{d\mu}{dx} \right) = 0$$

$$(27) \quad \frac{dl}{dy} + g \frac{d\mu}{dx} + \frac{d^2 \mu}{dx^2} = 0$$

En posant: $l = h - \frac{1}{2} g^2$, et en tenant compte de (26)

(27) devient :

$$(28) \quad \frac{dh}{dy} + g \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{d\mu}{dx} \right) + \frac{d^2 \mu}{dx^2} = 0$$

L'équation (26), en posant $g = -\Sigma$, $p - \frac{\partial p}{\partial \theta} = P$, devient :

$$(29) \quad \frac{d\Sigma}{dy} + \frac{\partial \mu}{\partial x} + P \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{dP}{dy} \frac{\partial \mu}{\partial q} = 0$$

$$\text{ou :} \quad \frac{d\Sigma}{dy} + \frac{d\mu}{dx} = 0$$

C'est l'équation (15).

D'où le résultat fondamental : Les invariants du troisième ordre se trouvent parmi les formes déjà trouvées pour les invariants du second ordre.

On prend donc pour μ une des formes trouvées au N° précédent. Si P est la valeur correspondante, on en déduit p en intégrant :

$$p - \frac{\partial p}{\partial \theta} = P$$

ou : $P = P_0 + B(x, y, z) e^{\theta}$

g est donné immédiatement par :

$$g = \sum + X \quad (X \text{ fonction de } x \text{ seul})$$

et on cherche à déterminer h par l'équation (28).

II) En différenciant également par rapport à y, on obtient de même :

$$(30) \quad \frac{df}{dx} \left[\frac{dg}{dy} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{dh}{dx} \right) \right] + \frac{dl}{dy} + g \frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

qui se décompose en :

$$(31) \quad \frac{dg}{dy} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{dh}{dx} \right) = 0$$

$$(32) \quad \frac{dl}{dy} + g \frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

Posant $\frac{\partial p}{\partial \theta} = p$, l'équation (31) s'écrit :

$$(33) \quad \frac{dg}{dy} + p \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{dp}{dy} \frac{\partial \mu}{\partial q} = 0$$

On prendra encore cette fois-ci, pour μ , une des formes déjà trouvées, mais indépendantes de x (à cause de l'absence du terme $\frac{\partial \mu}{\partial x}$). D'où l'on déduit P puis p par intégration de l'équation (33), dans laquelle on a pris $g = \sum + X$. Enfin on cherche à déterminer l par l'équation (32).

44.- Invariant d'ordre supérieur.

Les résultats précédents s'étendent aux ordres supérieurs à partir du second. On n'utilise pour μ que les formes trouvées pour le second ordre et les formes de p correspondantes.

§ 2. Involutions et invariants rationnels.

45.- Involutions du 2d et du 3ème ordre.

Soit l'équation (1) et l'équation du 3ème ordre :

$$(34) \quad \phi = p_2 + Ap_1^2 + Bp_1 + C = 0$$

la relation étant supposée invariante le long de la caractéristique x , c'est-à-dire que ϕ vérifie l'équation :

$$(35) \quad \left[\frac{d\phi}{dy} \right] = M \phi$$

Montrons que A, B, C ne dépendent que de x, y, z, p et non de q . En effet, s'ils contenaient q , $\left[\frac{d\phi}{dy} \right]$ contiendrait q_1 et l'égalité précédente conduirait à une identification à zéro des coefficients de p_1 et q_1 ; d'où l'on déduit immédiatement :

$$\frac{\partial A}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial q} = 0$$

Calculons donc $\left[\frac{d\phi}{dy} \right]$

$$\left[\frac{d\phi}{dy} \right] = \frac{\partial p}{\partial y} 2 + 2Ap_1 \frac{\partial p_1}{\partial y} + B \frac{\partial p_1}{\partial y} + C + \frac{dA}{dy} p_1^2 + \frac{dB}{dy} p_1 + \frac{dC}{dy}$$

Pour pouvoir poursuivre le calcul, il faut chercher les valeurs de $\frac{\partial p_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial p_2}{\partial y}$:

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial p} p_1 + \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial f}{\partial q}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{\partial f}{\partial p} p_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} p_1^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial f}{\partial q} \right)^2 + p_1 \left(2 \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial x} + 2p \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial z} + \right.$$

$$\left. 2f \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} \right)$$

En portant ces valeurs dans l'égalité (35), il vient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial p} p_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} p_1^2 + \left(2 \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial x} + 2p \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial z} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} \right) p_1 \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial f}{\partial q} \right)^2 + (2Ap_1 + B) \left(\frac{\partial f}{\partial p} p_1 + \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial f}{\partial q} \right) + \frac{dA}{dy} p_1^2 + \\ & + \frac{dB}{dy} p_1 + \frac{dC}{dy} = M(p_2 + Ap_1^2 + Bp_1 + C) \end{aligned}$$

En identifiant, on obtient pour les coefficients des termes en p_2 et en p_1^2 :

$$(36) \quad \frac{\partial f}{\partial p} = M$$

$$(37) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + 2A \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{dA}{dy} = MA$$

Nous poserons :

$$(38) \quad A = \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

Puis nous intégrerons l'équation (37) par rapport à p :

$$(39) \quad \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \omega}{\partial p} f + \frac{\partial \omega}{\partial y} + q \frac{\partial \omega}{\partial z} = \mu(x, y, z, q)$$

Posant encore :

$$(40) \quad \omega = \text{Log} \frac{\partial \theta}{\partial p}$$

$$(39) \text{ devient alors : } (39') \quad \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \theta}{\partial p} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2} f + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial p} + q \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial p} = \mu \frac{\partial \theta}{\partial p}$$

qui s'intègre une deuxième fois :

$$(41) \quad \frac{d\theta}{dy} = \mu \theta + \nu$$

$$\text{où, on le rappelle, } \frac{d\theta}{dy} = \frac{\partial \theta}{\partial y} + q \frac{\partial \theta}{\partial z} + f \frac{\partial \theta}{\partial p}$$

Cette équation (41) est la forme canonique de l'équation (1) qui admet une involution du 3ème ordre relative à la caractéristique x . Dans cette équation,

θ est fonction de x, y, z, p ;

μ est fonction de x, y, z, q ;

ν est fonction de x, y, z, q .

On achève la détermination de la relation invariante par le calcul de B et C à partir de l'identification des termes du 1er degré en p_1 et des termes indépendants de P_1 .

Soit maintenant l'expression du second ordre :

$$(42) \quad \Psi = p_1 + D(x, y, z, p)$$

supposée également invariante le long de la caractéristique x et vérifiant par conséquent la relation ;

$$(43) \left[\frac{d\bar{\Psi}}{dy} \right] = N \bar{\Psi}$$

Cette équation développée s'écrit :

$$p_1 \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial y} + q \frac{\partial D}{\partial z} + f \frac{\partial D}{\partial p} = N (p_1 + D)$$

Ici encore : (44) $N = \frac{\partial f}{\partial p}$, comme M dans le cas précédent. Il nous reste alors l'équation :

$$(45) \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial y} + q \frac{\partial D}{\partial z} + f \frac{\partial D}{\partial p} - D \frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

L'équation proposée étant mise sous la forme (41), nous poserons :

$$(46) \bar{\Psi} \frac{\partial \theta}{\partial p} = \chi$$

Alors :

$$(47) \left[\frac{d\chi}{dy} \right] = \bar{\Psi} \frac{d \frac{\partial \theta}{\partial p}}{dy} + \frac{\partial \theta}{\partial p} \frac{d\bar{\Psi}}{dy} \\ = \bar{\Psi} \frac{d \frac{\partial \theta}{\partial p}}{dy} + \frac{\partial \theta}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial p} \bar{\Psi} \\ = \chi \left[\frac{\frac{d \frac{\partial \theta}{\partial p}}{dy}}{\frac{\partial \theta}{\partial p}} + \frac{\partial f}{\partial p} \right]$$

Mais d'après (39'), $\frac{d\chi}{dy} = \mu \chi$

$$\text{D'autre part : } \chi = (p_1 + D) \frac{\partial \theta}{\partial p} \\ = \frac{d\theta}{dx} + D \frac{\partial \theta}{\partial p} - \frac{\partial \theta}{\partial x} - p \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

L'involution prend donc la forme canonique :

$$(48) \chi = \frac{d\theta}{dx} + u(x, y, z, p)$$

à condition de poser :

$$u = D \frac{\partial \theta}{\partial p} - \frac{\partial \theta}{\partial x} - p \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

Il ne reste plus à déterminer maintenant que l'équation qui donne u. Récrivons l'équation (47) où χ a la valeur (48) :

$$(49) \quad \frac{d}{dy} \left(\frac{d\theta}{dx} + u \right) = \mu \left(\frac{d\theta}{dx} + u \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\theta}{dy} \right) + \frac{du}{dy} = \mu \left(\frac{d\theta}{dx} + u \right)$$

$$\frac{d}{dx} (\mu^{\theta+u}) + \frac{du}{dy} = \mu \left(\frac{d\theta}{dx} + u \right)$$

ou enfin :

$$(49') \quad \frac{du}{dy} = u\lambda - \theta \frac{d\lambda}{dx} - \frac{d\theta}{dx}$$

Cette équation détermine u.

Ainsi, dans le cas d'une relation invariante du second ordre relative à la caractéristique x, l'équation proposée prend la forme (41), la relation en question, la forme (48) et l'équation à vérifier par celle-ci est l'équation (49'). Ces équations correspondent à l'équation (13), à l'invariant (14) et à l'équation à vérifier par celui-ci: (15). Ici aussi, on pourrait faire une discussion de cette équation (49').

46.- Construction d'un invariant rationnel à partir de deux involutions.

Si nous supposons que l'équation proposée admet les deux relations invariantes (34) et (48), nous pouvons à l'aide de ces deux relations relatives à la même caractéristique, construire un invariant rationnel.

En effet, si l'on pose :

$$(50) \quad \phi \frac{\partial \Omega}{\partial p} = \Omega$$

$\frac{\Omega}{\chi}$ est l'invariant cherché. Ω vérifie en effet aussi l'équation :

$$(51) \quad \frac{d\Omega}{dy} = \mu \Omega$$

comme on le voit par un calcul analogue à celui du N° précédent.

Si l'on forme maintenant : (52)

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{\Omega}{\chi} \right) = \frac{1}{\chi^2} \left(\chi \frac{d\Omega}{dy} - \Omega \frac{d\chi}{dy} \right)$$

Comme χ et Ω vérifient tous deux la relation (51), le second membre de la relation (52) est nul et notre proposition est démontrée.

Remarque : Il est bien évident que la proposition qui fait l'objet du présent N^o, est générale et ne dépend pas de l'ordre des involutions considérées.

47.- Nous terminerons cette étude de l'équation

$$s = f(x, y, z, p, q)$$

par un exemple trouvé dans des papiers inédits de DRACH.

soit :

$$s = \frac{e^z}{\psi''(p)}$$

l'équation proposée. Nous allons montrer qu'elle admet un invariant du 2^d ordre, sans qu'on puisse la ramener à un des types de GOURSAT.

Pour la ramener à la forme canonique, nous poserons :

$$\theta = \varphi'(p)$$

$$\mu = e^z$$

L'équation proposée s'écrit donc :

$$s \frac{d\theta}{dp} = \mu$$

L'invariant est donc : $\frac{d\theta}{dx} + \sigma = X$

où σ vérifie : $p e^z + \frac{d\sigma}{dy} = 0$

Donc σ dépend de θ seul : $\frac{d\sigma}{d\theta} = -p$

En intégrant, puisque $d\theta = \varphi'' dp$: $\sigma = -(p \varphi' - \varphi)$

L'invariant est donc : $p_1 \varphi''(p) - p \varphi' + \varphi = X$

CHAPITRE IV

EQUATION $s = f(x, y, z, p, q, r)$ ADMETTANT un
INVARIANT du SECOND ORDRE

§ 1. Cas de la caractéristique explicite.

48.- Soit : (1) $s = f(x, y, z, p, q, r)$

l'équation proposée.

Le système (Σ) s'écrit ici (v. Ch. II § 2) :

$$\begin{array}{ll}
 (2) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0 & (2') \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 1 \\
 (3) \quad \frac{z}{\partial x} = p \frac{\partial x}{\partial x} & (3') \quad \frac{\partial z}{\partial z} = p \frac{\partial x}{\partial z} + q \\
 (4) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = p_1 \frac{\partial x}{\partial x} & (4') \quad \frac{\partial p}{\partial z} = p_1 \frac{\partial x}{\partial z} + r \\
 (5) \quad \frac{\partial q}{\partial x} = f \frac{\partial x}{\partial x} & (5') \quad \frac{\partial q}{\partial z} = f \frac{\partial x}{\partial z} + q_1
 \end{array}$$

où $p_1 = r$, $q_1 = t$, avec les notations que nous avons adoptées.

L'équation différentielle des caractéristiques s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial p_1} dy^2 + dx dy = 0$$

qui se décompose en (6) $dy = 0$

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial p_1} dy + dx = 0$$

dont nous désignerons les intégrales par β et α respectivement.

La caractéristique β est donc la caractéristique explicite; α , la caractéristique implicite.

L'équation (6) donne (2) et permet, en disposant de la fonction arbitraire, de poser (2').

(7) permet alors d'écrire :

$$(8) \quad \frac{\partial x}{\partial z} = - \frac{\partial f}{\partial p_1}$$

qui fait partie du système (Σ). On remplacera $\frac{\partial x}{\partial z}$ par sa valeur (8) dans les équations (3'), (4') et (5').

Pour former le système (12), nous devons adjoindre au système (Σ) les conditions d'intégrabilité de x, z, p, q, p_1 .

1°) Condition d'intégrabilité de x : Elle ne donne pas d'équation nouvelle, mais permet de calculer $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta}$:

$$(9) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} = - \frac{d}{d\alpha} \frac{\partial f}{\partial p_1} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}$$

avec $\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} + p_1 \frac{\partial}{\partial p} + f \frac{\partial}{\partial q}$

Nous prenons soin ici, comme toujours, d'écire à part le terme qui introduit un nouvel élément paramétrique.

2°) Condition d'intégrabilité de z : Elle est, comme dans le cas général, vérifiée identiquement.

3°) Condition d'intégrabilité de p : Elle s'écrit :

$$\frac{\partial p_1}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \left(\frac{df}{dx} + \frac{\partial f}{\partial p_1} p_2 \right) \frac{\partial x}{\partial \alpha}$$

Or : $\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} = p_2 \frac{\partial x}{\partial \alpha}$, et tenant compte de (8), il vient :

$$(10) \quad \frac{\partial p_1}{\partial \beta} = \frac{df}{dx}$$

qui exprime la condition : $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}$

4°) Condition d'intégrabilité de q : Elle introduit un nouvel élément paramétrique q_1 : elle permet seulement de calculer $\frac{\partial q_1}{\partial \alpha}$:

$$\frac{df}{d\beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{df}{d\alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \alpha}$$

Or : $\frac{df}{d\alpha} = \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}$

$$\frac{df}{d\beta} = \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{df}{dy}$$

avec $\frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} + f \frac{\partial}{\partial p} + q_1 \frac{\partial}{\partial q}$

L'égalité devient donc :

$$(-\frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{df}{dx} + \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{df}{dy}) \frac{\partial x}{\partial \alpha} = -\frac{df}{dx} \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - (\frac{\partial f}{\partial p_1})^2 \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial q_1}{\partial \alpha}$$

ou, enfin :

$$(11) \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} = (\frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + (\frac{\partial f}{\partial p_1})^2 \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}$$

Nous avons ainsi établi le système (Ω), obtenu en adjoignant (9) et (10) à Σ .

Il est facile de voir quels sont ici les éléments paramétriques : x, y, z, p, p_1, q , les dérivées de x par rapport à α seul, aucune dérivée de y à cause de (2) et (2'), les dérivées de p_1 par rapport à α seul, q_1 et ses dérivées par rapport à β seul.

Il y a donc, en définitive, trois suites de dérivées successives paramétriques: c'est un cas intermédiaire entre celui des équations étudiées au chapitre III, où il y en a deux, et le cas général, où il y en a quatre.

Le cas d'une équation (1) admettant un invariant du second ordre est le plus simple qui se présente à nous, l'invariant du premier ordre étant une "intégrale intermédiaire", cas étudié depuis longtemps.

49.- Soit donc : (12) $\Psi(x, y, z, p, p_1, q, q_1) = F(\beta)$

l'invariant considéré, relatif à la caractéristique explicite β .

Nous utiliserons les résultats généraux obtenus au N°40.

Ecrivons donc :

$$\left[\frac{d\Psi}{d\alpha} \right] = 0$$

soit : (13) $(\frac{d^2 p}{dx^2}) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} = 0$

Les éléments $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}$ sont paramétriques. Remplaçons $\frac{\partial q_1}{\partial \alpha}$ par sa valeur (11). Il vient :

$$(\frac{d^2 p}{dx^2}) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} (\frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} (\frac{\partial f}{\partial p_1})^2 \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} = 0$$

En égalant à zéro les coefficients des deux éléments paramétriques $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}$, on obtient :

$$(I) \quad \begin{cases} (14) & \frac{d\psi}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \left(\frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \right) = 0 \\ (15) & \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \left(\frac{\partial f}{\partial p_1} \right)^2 = 0 \end{cases}$$

On voit que, dans le système précédent où ψ est l'inconnue, q_1 n'entre dans les coefficients que linéairement et ce, dans le coefficient de $\frac{\partial \psi}{\partial q_1}$. Il en résulte que ψ est linéaire en q_1 (1).

Nous poserons : (16) $\psi = Aq_1 + B$,
où A et B sont fonctions des six arguments x, y, z, p, p_1, q .

Le système (I) prend la forme :

$$(II) \quad \begin{cases} (17) & \frac{\partial A}{\partial p_1} = 0 \\ (18) & \frac{dA}{dx} + A \frac{\partial f}{\partial q} = 0 \\ (19) & \frac{\partial B}{\partial p_1} + A \left(\frac{\partial f}{\partial p_1} \right)^2 = 0 \\ (20) & \frac{dB}{dx} + A \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{df}{dx} + \left(\frac{df}{dy} \right) = 0 \end{cases}$$

avec : $\left(\frac{d}{dy} \right) = \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} + f \frac{\partial}{\partial p}$.

Le système (II) est obtenu à partir du système (I) en remplaçant dans celui-ci ψ par sa valeur (16) et en annulant séparément le coefficient de q_1 et le terme indépendants de q_1 .

Remarque : A est essentiellement différent de zéro, c'est-à-dire que ψ dépend nécessairement de q_1 , sinon, d'après (19), $\frac{\partial B}{\partial p_1} = 0$ et l'invariant se réduirait au premier ordre, cas que nous avons formellement exclu.

50.- Nous allons maintenant mettre l'invariant sous forme canonique, en posant comme au N°40 :

$$(21) \quad A = \frac{\partial \theta}{\partial q}$$

θ n'étant, d'après (17), fonction que des cinq arguments x, y, z, p, q .

On peut alors intégrer (18) :

$$(22) \quad \frac{d\theta}{dx} = \lambda(x, y, z, p, p_1)$$

Cette équation (22) remplace l'équation proposée (1), puisqu'on peut en tirer :

$$(23) \quad f = \frac{\lambda - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + p \frac{\partial \theta}{\partial z} + p_1 \frac{\partial \theta}{\partial p} \right)}{\frac{\partial \theta}{\partial q}}$$

L'invariant s'écrit alors $\varphi = \frac{\partial \theta}{\partial q} q_1 + B$; pour le mettre sous forme canonique, nous l'écrirons :

$$(24) \quad \varphi = \frac{d\theta}{dy} + C(x, y, z, p, q, p_1) = F \quad (\beta)$$

en posant : $C = B - \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} + q \frac{\partial \theta}{\partial z} + f \frac{\partial \theta}{\partial p} \right),$

où f a la valeur (23).

Le problème proposé : déterminer f et φ de façon que le système (1) (12) soit compatible, est remplacé par le suivant : déterminer les trois fonctions θ, λ, C vérifiant le système (22), (24). Ce problème semble plus compliqué que le précédent, mais θ ne dépend que des cinq arguments x, y, z, p, q ; λ , des cinq arguments x, y, z, p, p_1 ; et C , des six arguments x, y, z, p, p_1, q , alors que f dépendait de six arguments et φ , de sept.

Dérivons l'équation (24) par rapport à x , pour éliminer la fonction arbitraire et chercher les conditions que doit vérifier C .

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\theta}{dy} + C \right) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\theta}{dy} + C \right) \frac{\lambda x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial p_1} \left(\frac{d\theta}{dy} + C \right) \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$$

Cette équation se décompose en deux autres, obtenues en annulant les coefficients de $\frac{\partial x}{\partial x}$ et de $\frac{\partial p_1}{\partial x}$:

$$(25) \quad \frac{\partial C}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{d\theta}{dy} = 0$$

$$(26) \quad \frac{dC}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{d\theta}{dy} = 0$$

Les opérateurs $\frac{d}{dx}$ et $\frac{d}{dy}$ sont permutables; on peut donc écrire :

$$\frac{d}{dx} \frac{d\theta}{dy} = \frac{d}{dy} \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\lambda}{dy}$$

et l'équation (26) prend la forme :

$$(27) \quad \frac{dC}{dx} + \frac{d\lambda}{dy} = 0$$

analogue à l'équation (15) du N°42. Mais il y a ici différence essentielle, provenant de ce que C vérifie un système de deux équations, alors que σ vérifiait une équation unique.

Etudions d'abord la plus simple des deux: l'équation (25). Il faut calculer $\frac{\partial}{\partial p_1} \frac{d\theta}{dy}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{d\theta}{dy} &= \frac{\partial}{\partial p_1} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} + q \frac{\partial \theta}{\partial z} + f \frac{\partial \theta}{\partial p} + q_1 \frac{\partial \theta}{\partial q} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \theta}{\partial p} + \frac{\partial q_1}{\partial p_1} \frac{\partial \theta}{\partial q} \end{aligned}$$

puisque θ est indépendant de p_1 .

Pour calculer $\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$, on remarque que le calcul, se fait le long d'une caractéristique λ ; c'est donc le coefficient de $\frac{\partial p_1}{\partial \lambda}$ dans l'équation (11), c'est-à-dire $\left(\frac{\partial f}{\partial p_1} \right)^2$

L'équation (25) s'écrit donc :

$$\frac{\partial C}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial p_1} \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \theta}{\partial q} \right) = 0$$

Mais l'expression entre parenthèses n'est autre que

$\frac{\partial \lambda}{\partial p_1}$; l'équation (25) prend donc la forme :

$$(28) \quad \frac{\partial C}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} = 0$$

On est donc ramené à résoudre le système (27), (28), où C est l'inconnue et où f est donné par sa valeur (23).

51.- Pour étudier le système (27), (28), nous prendrons d'abord, avec DRACH, q comme fonction et θ comme variable indépendante. L'équation (23) prend la forme très simple :

$$(29) \quad f = \frac{\partial q}{\partial x} + p \frac{\partial q}{\partial z} + p_1 \frac{\partial q}{\partial p} + \lambda \frac{\partial q}{\partial \theta} = \frac{dq}{dx}$$

L'équation (28) s'écrit alors :

$$(30) \quad \frac{\partial C}{\partial p_1} + \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} \left(\frac{\partial q}{\partial p} + \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) = 0,$$

où q est fonction des cinq arguments x, y, z, p, θ .

Cette équation est intégrable, si on sait calculer

$\int \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p_1} \right)^2 dp_1$, puisque q ne dépend pas de p_1 . Pour y parvenir, nous poserons :

$$(31) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} = \mu$$

et nous prendrons μ comme variable indépendante au lieu de p_1 .

Il suffit de poser maintenant :

$$(32) \quad p_1 = \frac{\partial^2 p_1}{\partial \mu^2}$$

où p_1 est fonction des cinq arguments x, y, z, p, μ , pour pouvoir intégrer l'équation (30).

Remarque : Pour que les changements de variables précédents soient possibles il est nécessaire que $\frac{\partial \lambda}{\partial p_1}$ dépende effectivement de p_1 , donc que λ ne soit pas linéaire en p_1 . Nous verrons plus loin que dans ce cas, l'équation proposée est elle-même linéaire en p_1 et nous étudierons ce cas particulier en détail au paragraphe suivant.

L'équation (30) prend la forme :

$$(33) \quad \frac{\partial C}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial^3 p_1}{\partial \mu^3} \left(\frac{\partial q}{\partial p} + \mu \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) = 0$$

qui s'intègre :

$$(34) \quad C + \frac{\partial q}{\partial p} \left(\mu \frac{\partial^2 p_1}{\partial \mu^2} - \frac{\partial p_1}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial q}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial^2 p_1}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial p_1}{\partial \mu} + 2p_1 \right) = C_1$$

où C_1 est une fonction de x, y, z, p, θ .

Nous porterons la valeur de C ainsi obtenue, dans l'équation (27), après avoir calculé λ à l'aide des nouvelles variables μ et p_1 . L'égalité évidente :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_1} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial \mu}}{\frac{\partial^3 p_1}{\partial \mu^3}} = \mu$$

s'intègre et donne λ :

$$(35) \quad \lambda = \mu \frac{\partial^2 p_1}{\partial \mu^2} - \frac{\partial p_1}{\partial \mu}$$

à laquelle il est inutile d'ajouter une constante d'intégration, puisqu'on peut faire entrer celle-ci dans p_1 .

Calculons enfin $\frac{d\lambda}{dy}$:

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{\partial \lambda}{\partial y} + q \frac{\partial \lambda}{\partial z} + r \frac{\partial \lambda}{\partial p} + \frac{dr}{dx} \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} = \frac{\partial \lambda}{\partial y} + q \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{dq}{dx} \frac{\partial \lambda}{\partial p} + \frac{d^2 q}{dx^2} \frac{\partial \lambda}{\partial p_1}$$

l'équation (27) devient ainsi :

$$\begin{aligned}
 (36) \quad & \frac{\partial C_1}{\partial x} + p \frac{\partial C_1}{\partial z} + P_1'' \frac{\partial C_1}{\partial p} + (\mu P_1'' - P_1') \frac{\partial C_1}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial P_1''}{\partial y} - \frac{\partial P_1'}{\partial y} + \\
 & + q (\mu \frac{\partial P_1''}{\partial z} - \frac{\partial P_1'}{\partial z}) + \mu P_1'' \frac{\partial q}{\partial z} + (\mu \frac{\partial P_1''}{\partial p} - \frac{\partial P_1'}{\partial p}) (\frac{\partial q}{\partial x} + p \frac{\partial q}{\partial z}) - \\
 & - \left[\mu \frac{\partial P_1''}{\partial x} - \frac{\partial P_1'}{\partial x} + p (\mu \frac{\partial P_1''}{\partial z} - \frac{\partial P_1'}{\partial z}) \right] \frac{\partial q}{\partial p} + \left[\mu \frac{\partial P_1'}{\partial x} - 2 \frac{\partial P_1}{\partial x} + P_1'' (\mu \frac{\partial P_1'}{\partial p} - 2 \frac{\partial P_1}{\partial p}) \right] + \\
 & + p (\mu \frac{\partial P_1}{\partial z} - 2 \frac{\partial P_1}{\partial z}) + (\mu \frac{\partial P_1}{\partial p} - \frac{\partial P_1}{\partial p}) (\mu P_1'' - P_1') \left] \frac{\partial q}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \right. \right. \\
 & + 2p \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial z} + p^2 \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}) + (\mu P_1'' + P_1') \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial p} + p \frac{\partial^2 q}{\partial z \partial p} \right) + P_1'' P_1' \frac{\partial^2 q}{\partial p^2} + \\
 & + (\mu P_1'' - 2P_1) \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial \theta} + p \frac{\partial^2 q}{\partial z \partial \theta} \right) + (2\mu P_1' P_1'' - P_1'^2 - 2P_1 P_1'') \\
 & \frac{\partial^2 q}{\partial p \partial \theta} + (\mu P_1'' - P_1') (\mu P_1' - 2P_1) \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} = 0
 \end{aligned}$$

où les dérivées de P_1 par rapport à μ sont désignées par des accents.

Cette équation est unique comme dans le cas des équations $s = f(x, y, z, p, q)$, mais elle contient trois fonctions de cinq arguments : $C_1(x, y, z, p, \theta)$, $q(x, y, z, p, \theta)$, $P_1(x, y, z, p, \mu)$, au lieu de trois fonctions de quatre arguments : $\mu(x, y, z, q)$, $\sigma(x, y, z, \theta)$, $p(x, y, z, \theta)$.

52.- L'étude de l'équation (36) permet de résoudre le problème que nous nous sommes posé; malheureusement, cette étude paraissant inabordable d'une façon générale, nous avons dû nous borner à un certain nombre de cas particuliers. Considérons donc les équations définies par :

$$(37) \quad P_1 = h(\mu - k)^n + a\mu + b$$

où $h; k; a; b$ sont des fonctions de x, y, z, p et n une constante. Le binôme que nous avons ajouté, provient de ce que le changement de variables qui sert à le définir, porte en réalité sur μ et non sur P_1 .

En substituant la valeur (37) de P_1 dans (36), seul le terme d'exposant $2n-1$ est unique et il s'écrit :

$$n(n-2)h^2 \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}$$

le cas $n-2$ est exclu, puisque p_1'' ne dépendrait pas effectivement de μ . Il reste donc deux hypothèses :

1°) $\frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} = 0$: q est linéaire en θ ; nous étudierons ce cas plus loin.

2°) $\frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} \neq 0$: $2n-1$ doit être égal à un des autres exposants, qui sont : $2n-2, 2n-3, 2n-4, 2n-5, n, n-1, n-2, n-3, 1, 0$. Les valeurs $0, 1, 2$ étant exclues pour n , il reste les cas suivants :

a) $n = \frac{1}{2}$, b) $n = -1$ c) $n = -2$, ce dernier seulement si $K \neq 0$.

53.- Etude du cas où $P_1 = 4h\mu^{\frac{1}{2}} + b\mu + c$

En égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de μ , on obtient le système :

$$(1) \quad -2h^2 \frac{\partial^2 q}{\partial p^2} = 0 \quad (1') \quad -h \frac{\partial c}{\partial p} + 2h \frac{\partial c}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial \theta} - bh \frac{\partial^2 q}{\partial p^2} - 2h \frac{\partial^2 q}{\partial p \partial \theta} = 0$$

$$(2) \quad 15h \frac{\partial h}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0$$

$$(3) \quad -3h \frac{\partial c}{\partial \theta} - 3 \left[\frac{\partial h}{\partial y} + q \frac{\partial h}{\partial z} + \left(\frac{\partial q}{\partial x} + p \frac{\partial q}{\partial z} \right) \frac{\partial h}{\partial p} \right] - h \frac{\partial q}{\partial z} + 3 \left(\frac{\partial h}{\partial x} + p \frac{\partial h}{\partial z} \right) \frac{\partial q}{\partial p} + \\ + (4h \frac{\partial b}{\partial p} + 3b \frac{\partial h}{\partial p}) \frac{\partial q}{\partial \theta} + h \left(\frac{\partial^2 q}{\partial p \partial x} + p \frac{\partial^2 q}{\partial p \partial z} \right) - 4hb \frac{\partial^2 q}{\partial p \partial \theta} + 6hc \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} = 0$$

$$(4) \quad \frac{\partial c}{\partial x} + p \frac{\partial c}{\partial z} - b \frac{\partial c}{\partial \theta} - \left[\frac{\partial b}{\partial y} + q \frac{\partial b}{\partial z} + \left(\frac{\partial q}{\partial x} + p \frac{\partial q}{\partial z} \right) \frac{\partial b}{\partial p} \right] + \frac{\partial q}{\partial p} \left(\frac{\partial b}{\partial x} + p \frac{\partial b}{\partial z} \right) - \\ - \frac{\partial q}{\partial \theta} \left[2 \left(\frac{\partial c}{\partial x} + p \frac{\partial c}{\partial z} \right) - b \frac{\partial b}{\partial p} \right] + b \left(\frac{\partial^2 q}{\partial p \partial x} + p \frac{\partial^2 q}{\partial p \partial z} \right) - 2c \left(\frac{\partial^2 q}{\partial \theta \partial x} + p \frac{\partial^2 q}{\partial \theta \partial z} \right) - \\ - b^2 \frac{\partial^2 q}{\partial p \partial \theta} + (2bc + 18h^2) \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} = 0$$

$$(5) -6 \frac{\partial q}{\partial \theta} \left(\frac{\partial h}{\partial x} + p \frac{\partial h}{\partial z} \right) - 9h \left(\frac{\partial^2 q}{\partial \theta \partial x} + p \frac{\partial^2 q}{\partial \theta \partial z} \right) + 9bh \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} = 0$$

$$(6) - \left(\frac{\partial b}{\partial x} + p \frac{\partial b}{\partial z} \right) \frac{\partial q}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2p \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial z} + p^2 \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - 2b \left(\frac{\partial^2 q}{\partial \theta \partial x} + p \frac{\partial^2 q}{\partial \theta \partial z} \right) + b^2 \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} = 0$$

D'après (1) : $\frac{\partial^2 q}{\partial p^2} = 0$; nous poserons :

$$q = q_1 p + q_2$$

où q_1 et q_2 sont fonctions de x, y, z, θ .

$$\text{D'après (2) : } \frac{\partial h}{\partial p} = 0$$

On peut maintenant intégrer (1') :

$$C_1 = 2c \frac{\partial q}{\partial \theta} + C_2(x, y, z, \theta)$$

En substituant cette valeur dans (3) :

$$(3') -3h \frac{\partial C}{\partial \theta} - 3 \left[\frac{\partial h}{\partial y} + (p q_1 + q_2) \frac{\partial h}{\partial z} \right] - h \left(\frac{\partial q}{\partial z} p + \frac{\partial q}{\partial z} \right) 3q_1 \left(\frac{\partial h}{\partial x} + p \frac{\partial h}{\partial z} \right) + 4h \frac{\partial b}{\partial p} \left(\frac{\partial q}{\partial \theta} p + \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) + h \left(\frac{\partial q}{\partial x} + p \frac{\partial q}{\partial z} \right) - 4hb \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0$$

En dérivant par rapport à p , il vient :

$$(3'') 4h \frac{\partial^2 b}{\partial p^2} \left(p \frac{\partial q}{\partial \theta} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\text{Donc } \frac{\partial^2 b}{\partial p^2} = 0 \text{ et on peut poser : } b = b_1 p + b_2$$

où b_1 et b_2 sont des fonctions de x, y, z ,

On obtient alors :

$$(38) \frac{\partial C}{\partial \theta} = - \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial y} + q_2 \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{q_1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{4}{3} (b_1 \frac{\partial q}{\partial \theta} - b_2 \frac{\partial q}{\partial \theta}) + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial z} \right)$$

En remplaçant q par sa valeur, l'équation (5) se décompose en trois autres, puisqu'elle devient un polynôme du 2^d degré en p :

$$(5-1) \frac{\partial^2 q}{\partial \theta \partial z} - b_1 \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial \text{Log } h}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0$$

$$(5-2) \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial \theta \partial x} - b_2 \frac{\partial^2 q_1}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 q_2}{\partial \theta \partial z} - b_1 \frac{\partial^2 q_2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \text{Log } h}{\partial x} \frac{\partial q_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \text{Log } h}{\partial z} \frac{\partial q_2}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$(5-3) \frac{\partial^2 q_2}{\partial \theta \partial x^2} - b_2 \frac{\partial^2 q_2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial \text{Log } h}{\partial x} \frac{\partial q_2}{\partial \theta} = 0$$

En écrivant les conditions d'intégrabilité de $\frac{\partial q_1}{\partial \theta}$ et de $\frac{\partial q_2}{\partial \theta}$ par rapport aux variables x et z , on trouve que, d'après les équations précédentes, b_1 et b_2 sont les dérivées partielles d'une même fonction B des trois variables x, y, z ; b s'écrira donc :

$$b = \frac{\partial B}{\partial x} + p \frac{\partial B}{\partial z}$$

Les équations (5) se simplifient si nous posons :

$$(39) \omega = \theta + B$$

et s'écrivent :

$$(5-1') \frac{\partial^2 q_1}{\partial \omega \partial z} + \frac{2}{3} \frac{\partial \text{Log } h}{\partial z} \frac{\partial q_1}{\partial \omega} = 0$$

$$(5-2') \frac{\partial^2 q_1}{\partial \omega \partial x} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial \omega^2} + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \text{Log } h}{\partial x} \frac{\partial q_1}{\partial \omega} + \frac{\partial \text{Log } h}{\partial z} \frac{\partial q_2}{\partial \omega} \right) = 0$$

$$(5-3') \frac{\partial^2 q_2}{\partial \omega \partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial \text{Log } h}{\partial x} \frac{\partial q_2}{\partial \omega} = 0$$

De la même manière, les équations (3) et (4) deviennent :

$$(40) \frac{\partial C_3}{\partial x} + 18 h^2 \frac{\partial^2 q_2}{\partial \omega^2} = 0$$

$$(41) \frac{\partial C_3}{\partial z} + 18 h^2 \frac{\partial^2 q_1}{\partial \omega^2} = 0$$

$$(42) \frac{\partial C_3}{\partial \omega} + \frac{\partial \text{Log } h}{\partial y} + q_2 \frac{\partial \text{Log } h}{\partial z} - q_1 \frac{\partial \text{Log } h}{\partial x} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial q_1}{\partial x} - \frac{\partial q_2}{\partial z} \right) = 0$$

où l'on a posé : (43) $C_2 = C_3 + \frac{\partial B}{\partial y} - q_1 \frac{\partial B}{\partial x} + q_2 \frac{\partial B}{\partial z}$

On peut intégrer le système formé des trois équations (5) et en déduire la valeur de q :

$$q_1 = x h - \frac{2}{3} Q(y, \omega)$$

$$q_2 = -z h^{-\frac{2}{3}} Q(y, \omega)$$

En portant ces valeurs dans l'équation (6) et en opérant le même calcul d'identification, on trouve :

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 q_2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 q_1}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{x^2} + 2 \frac{\partial^2 q_2}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} = 0$$

De ces équations, il résulte que $h^{-\frac{2}{3}}$ est linéaire en x et z :

$$(44) \quad h = (\lambda x + \mu z + \nu)^{-\frac{3}{2}}$$

où, λ, μ, ν sont fonctions de y seul.

De la condition d'intégrabilité $\frac{\partial^2 C_3}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 C_3}{\partial z \partial x}$, on déduit que $\nu = 0$.

$$C_3 = -\frac{18z \frac{\partial^2 Q}{\partial \omega^2}}{\lambda(\lambda x + \mu z)} + C_4(y, \omega)$$

En portant cette valeur dans l'équation (42), il vient :

$$\frac{\partial^3 Q}{\partial \omega^3} = 0, \quad \frac{d\lambda}{dy} = 0, \quad \frac{d\mu}{dy} = 0, \quad \frac{\partial C_4}{\partial \omega} = 0$$

Donc Q est une fonction du 2d degré de ω ; λ et μ des constantes absolues.

D'où la solution du problème :

$$P = 4(\lambda x + \mu z)^{-\frac{2}{3}} \mu^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\partial B}{\partial x} + p \frac{\partial B}{\partial z}\right) \mu + c$$

$$q = (px - z)(ax + bz)(Y_1 \omega^2 + Y_2 \omega + Y_3)$$

$$C_1 = 2c \frac{\partial q}{\partial \omega} + \frac{\partial B}{\partial y} - (ax+bz) \left(x \frac{\partial B}{\partial x} + z \frac{\partial B}{\partial z} \right) (Y_1 \omega^2 + Y_2 \omega + Y_3) - \frac{36zY_1}{a(ax+bz)} + Y$$

où a, b sont des constantes absolues; c , une fonction de x, y, z, p ; B , une fonction de x, y, z ; et enfin $\omega = \theta + B$

54.- Cas où q est linéaire en θ .

P ayant la forme (37), nous allons nous attacher ici à déterminer les différentes valeurs possibles de l'exposant n , chacune conduisant à un cas particulier qu'il conviendra d'étudier ultérieurement en détail, comme nous l'avons fait au N° précédent.

Nous supposons d'abord $K = 0$. Le raisonnement du N°52 peut se répéter ici pour le terme d'exposant $2n-2$ ou $2n-3$ et nous conduit à distinguer les valeurs suivantes de n :

1°) $n = 3$, pour laquelle $2n-3 = n$ et $n-2 = 1$

2°) $n = \frac{3}{2}$, pour laquelle $2n-2 = 1$ et $2n-3 = 0$

Ces valeurs étant écartées, nous posons :

$$(45) \quad q = q_1(x, y, z, p) \theta + q_2(x, y, z, p)$$

L'équation (36) étant linéaire à la fois en C_1 et q , nous pouvons en conclure que C_1 est également linéaire en :

$$(46) \quad C_1 = C_2(x, y, z, p) \theta + C_3(x, y, z, p)$$

D'autre part, nous avons posé "a priori"

$$(37) \quad P_1 = h \mu^n + b \mu + c$$

Il résulte de ce qui précède une double identification des coefficients de l'équation (36) ainsi transformée, tant des coefficients des puissances de μ que de celles de θ . On obtient ainsi le système suivant :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & n(n-2)(n^2-n-1)h\frac{\partial h}{\partial p}q_1 + n(n-2)(2n-1)h\frac{\partial^2 q_1}{\partial p} = 0 \\
 (2) \quad & n^2(n-1)^2h\frac{\partial h}{\partial p}\frac{\partial q_1}{\partial p} + n^2(n-1)h\frac{\partial^2 q_1}{\partial p^2} = 0 \\
 (3) \quad & \left(\frac{\partial h}{\partial x} + p\frac{\partial h}{\partial z}\right)q_1 + (n+1)h\left(\frac{\partial q_1}{\partial x} + p\frac{\partial q_1}{\partial z}\right) = 0 \\
 (4) \quad & n(n-2)\left[q_1\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial p}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x} + p\frac{\partial q_1}{\partial z}\right)\right] + n(n-1)h\frac{\partial q_1}{\partial z} + n\frac{\partial q_1}{\partial p}\left(\frac{\partial h}{\partial x} + p\frac{\partial h}{\partial z}\right) + \\
 & + n^2h\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial p\partial x} + p\frac{\partial^2 q_1}{\partial p\partial z}\right) = 0 \\
 (5) \quad & \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial^2 q_1}{\partial x\partial z} + p^2\frac{\partial^2 q_1}{\partial z^2} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & n^2(n-1)^2\frac{\partial h}{\partial p}\frac{\partial^2 q_2}{\partial p} + n^2(n-1)h\frac{\partial^2 q_2}{\partial p^2} = 0 \\
 (2) \quad & -q_1\left(\frac{\partial b}{\partial x} + p\frac{\partial b}{\partial z}\right) - 2b\left(\frac{\partial q_1}{\partial x} + p\frac{\partial q_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial^2 q_2}{\partial x\partial z} + p^2\frac{\partial^2 q_2}{\partial z^2} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & n(n-2)hC_2 + n(n-2)\left[\frac{\partial h}{\partial y} + q_2\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial p}\left(\frac{\partial q_2}{\partial x} + p\frac{\partial q_2}{\partial z}\right)\right] + n(n-1)h\frac{\partial q_2}{\partial z} + \\
 & + n\frac{\partial q_2}{\partial p}\left(\frac{\partial h}{\partial x} + p\frac{\partial h}{\partial z}\right) - nq_1\left[(n-2)b\frac{\partial h}{\partial p} + (2n-3)h\frac{\partial b}{\partial p}\right] + n^2h\left(\frac{\partial^2 q_2}{\partial p\partial x} + \right. \\
 & \left. + p\frac{\partial^2 q_2}{\partial p\partial z}\right) - 2nbh\frac{\partial q_1}{\partial p} = 0 \\
 (2) \quad & \frac{\partial C_2}{\partial p} + b\frac{\partial^2 q_1}{\partial p^2} = 0 \\
 (3) \quad & \frac{\partial C_2}{\partial x} + p\frac{\partial C_2}{\partial z} - q_1\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial p}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x} + p\frac{\partial q_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial q_1}{\partial p}\left(\frac{\partial b}{\partial x} + p\frac{\partial b}{\partial z}\right) + b\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial p\partial x} + \right. \\
 & \left. + p\frac{\partial^2 q_1}{\partial p\partial z}\right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{\partial C}{\partial p}^3 - 2\frac{\partial}{\partial p}(Cq_1) + b\frac{\partial^2 q_2}{\partial p^2} = 0 \\
 (2) \quad & \frac{\partial C}{\partial x}^3 + p\frac{\partial C}{\partial z}^3 - bC_2 - \frac{\partial b}{\partial y} - q_2\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial p}\left(\frac{\partial q_2}{\partial x} + p\frac{\partial q_2}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial b}{\partial x} + p\frac{\partial b}{\partial z}\right)\frac{\partial q_2}{\partial p} + \\
 & + b\left(\frac{\partial^2 q_2}{\partial p\partial x} + p\frac{\partial^2 q_2}{\partial p\partial z}\right) - q_1\left(2\frac{\partial C}{\partial x} + 2p\frac{\partial C}{\partial z} - b\frac{\partial b}{\partial p}\right) - 2C\left(\frac{\partial q_1}{\partial x} + p\frac{\partial q_1}{\partial z}\right) - b^2\frac{\partial q_1}{\partial p} = 0
 \end{aligned}$$

Si nous considérons l'équation comme connue, c'est à-dire que les coefficients b, c, h sont donnés, le système (I) sert à déterminer q_1 . Puis la détermination de q_1 ainsi achevée, le système (II) donnera q_2 . De même, le système (III) donnera C_2 et le système (IV), C_3 , les éléments précédents étant déterminés aupréalable.

Etude du système (I): Les équations (1) et (2), après suppression des facteurs numériques $n, n-1, n-2$, essentiellement différents de zéro, s'intègrent sous la forme suivante :

$$(47) \quad h = h_0 (p+\frac{2n-1}{5})^{n^2-2n+2}$$

$$(48) \quad q_1 = q_{10} (p+\frac{2n-1}{5})^{-\frac{n^2-n-1}{n^2-2n+2}}$$

où $h_0, q_{10}, \frac{2n-1}{5}$ sont des fonctions arbitraires de x, y, z .

Cas particulier : Si $n^2-2n+2=0$, c'est-à-dire $n=1+i$ ou $n=1-i$, h et q_1 sont exponentiels en p .

D'autre part, l'équation (5) s'intègre sous la forme

$$q_1 = z \psi(z-px) + \varphi(z-px)$$

où ψ et φ sont arbitraires.

Dans ces conditions, en rapprochant du résultat précédent, on voit que :

$$(47') \quad h = Y(z-px)^{\frac{2n-1}{n^2-2n+2}}$$

$$(48') \quad q_1 = Y_1(z-px)^{-\frac{n^2-n-1}{n^2-2n+2}}$$

Ces valeurs vérifient l'équation (4) à condition que :

$$(n-2)q_1 \frac{\partial h}{\partial z} + (n-1)h \frac{\partial q_1}{\partial z} = 0$$

En substituant dans cette équation les valeurs (47) et (48) de h et q_1 , on trouve la condition :

$$(n-2)(2n-1) - (n-1)(n^2-n-1) = 0$$

$$n^3 - 4n^2 + 5n - 1 = 0$$

C'est une équation irréductible. Elle ne conduit donc à aucune valeur intéressante pour n . Nous sommes donc ramenés à étudier les deux cas particuliers écartés au début, c'est-à-dire $n=3$ et $n=\frac{3}{2}$ pour lesquels le nombre d'équations est diminué.

Cas $n=3$. Les équations I-2 et I-3; I-5 et III-2; II-2 et IV-1 se groupent deux par deux.

Cas $n = \frac{3}{2}$. Les équations I-1 et II-2; I-2 et III-3; II-1 et IV-2 se groupent deux par deux.

§ 2. Equations $s = f(x, y, z, p, q, r)$ linéaires en r , présentant un invariant du second ordre pour la caractéristique explicite.

55.- Nous écrivons l'équation sous la forme (22) et l'invariant sous la forme (24), où C vérifie le système (27) et (28).

Mais si l'équation proposée est linéaire en p_1 , λ est aussi linéaire en p_1 , d'après l'équation (22). Soit:

$$(49) \quad \lambda = \lambda_1 p_1 + \lambda_2$$

où λ_1 et λ_2 sont fonction de x, y, z, p .

Nous poserons ensuite :

$$(50) \quad \lambda_1 = \frac{\partial \mu}{\partial p}$$

$$(51) \quad \lambda_2 = \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + p \frac{\partial \mu}{\partial z} + \Lambda$$

où Λ et μ sont deux autres fonctions de x, y, z, p .

Il suffit de poser enfin :

$$(52) \quad \theta - \mu = (H)$$

pour que l'équation (22) prenne la forme :

$$(53) \quad \frac{d\theta}{dx} = \Lambda$$

où Λ ne dépend que de x, y, z, p .

Mais alors, l'équation (28) devient simplement :

$$(54) \quad \frac{\partial C}{\partial p_1} = 0$$

et C ne vérifie plus que la seule équation (27) et n'est d'autre part, fonction que des cinq arguments x, y, z, p, q , dans cette même équation, Λ n'est plus fonction que des quatre arguments x, y, z, p .

Pour conserver les notations habituelles, nous écrirons λ au lieu de Λ , sans pour autant modifier le nombre d'arguments dont il dépend.

Pour poursuivre le calcul, nous allons, comme au paragraphe précédent, prendre q comme fonction et θ comme variable indépendante. Puis l'équation (27) se décompose en deux autres, puisqu'elle est linéaire en p_1 et doit être identiquement vérifiée, quelle que soit la valeur de p_1 . On obtient :

$$(55) \quad \frac{\partial C}{\partial p} + \frac{\partial \lambda}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial p} = 0$$

$$(56) \quad \frac{\partial C}{\partial x} + p \frac{\partial C}{\partial z} + \lambda \frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} + q \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial p} \left(\frac{\partial q}{\partial x} + p \frac{\partial q}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0$$

Si on pose :

$$(57) \quad C = C' - q \frac{\partial \lambda}{\partial p}$$

Le système précédent devient :

$$(58) \quad \frac{\partial C'}{\partial p} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} q = 0$$

$$(59) \quad \frac{\partial C'}{\partial x} + p \frac{\partial C'}{\partial z} + \lambda \frac{\partial C'}{\partial \theta} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} + q \left[\frac{\partial \lambda}{\partial z} - \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial x} + p \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial z} \right) \right] = 0$$

Si $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} \neq 0$, on peut tirer q de (58) et le porter dans (59); on obtient alors :

$$(60) \quad \frac{\partial C'}{\partial x} + p \frac{\partial C'}{\partial z} + \lambda \frac{\partial C'}{\partial \theta} + \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial x} - p \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial z}}{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}} \frac{\partial C'}{\partial p} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0$$

où C' est fonction de x, y, z, p, θ et λ , de x, y, z, p .

A toute solution C' de l'équation (60), correspond une valeur de q , donnée par (58), puis une équation

$s = \frac{dq}{dx}$ et un invariant $\frac{d\theta}{dy} + C = F(\beta)$, ou, en utilisant C' :

$$(61) \quad C' - \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial p} q - \lambda \frac{\partial q}{\partial p}}{\frac{\partial q}{\partial \theta}} = F(\beta)$$

Si on peut résoudre l'équation (58) en θ , on prendra l'équation sous la forme $\frac{d\theta}{dx} = \lambda$, et l'invariant sous la forme :

$$(61') \quad \frac{d\theta}{dy} + C' - \frac{\partial \lambda}{\partial p} q = F(\beta)$$

56.- Cas particulier : λ est linéaire en p.

Avant l'étude générale de l'équation (60), nous allons examiner les différents cas particuliers qui se présentent. Étudions d'abord le cas où λ est linéaire en p : dans ce cas, l'équation (58) ne contient pas q ; d'après cette même équation, C' est indépendant de p. Nous poserons :

$$(62) \quad \lambda = \lambda_1(x, y, z)p + \lambda_2(x, y, z)$$

puis : $(63) \quad \lambda_1 = \frac{\partial \mu}{\partial z}$

L'équation proposée sous la forme (22) devient :

$$\frac{d(\theta - \mu)}{dx} = \lambda_2(x, y, z) - \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

ou, en changeant de notations :

$$(64) \quad \frac{d\theta}{dx} = \lambda(x, y, z)$$

Par une transformation ponctuelle :

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = \lambda(x, y, z)$$

nous obtenons la forme canonique :

$$(65) \quad \frac{d\theta}{dx} = z$$

L'équation (59), la seule que vérifie C' , s'écrit :

$$(66) \quad \frac{\partial C'}{\partial x} + p \frac{\partial C'}{\partial z} + z \frac{\partial C'}{\partial \theta} + q = 0$$

Le problème est donc résolu de la manière suivante :

On prend pour C' une fonction arbitraire des quatre arguments x, y, z, θ , puis : $q = -\frac{dC'}{dx}$

$$f = -\frac{d^2 C'}{dx^2}, \text{ avec } \lambda = z.$$

L'invariant s'écrit sous la forme (61) :

$$C' + z \frac{\partial C'}{\partial z} + \frac{q_1 - \left[\frac{\partial q}{\partial y} + q \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial p} \left(\frac{\partial q}{\partial x} + p \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial p} \right) \right]}{\frac{\partial q}{\partial \theta}} = F(\beta)$$

Il nous reste à examiner les deux cas plus particuliers où on ne peut effectuer la transformation ponctuelle indiquée.

a) λ dépend de x et y mais non de z : Par une transformation ponctuelle analogue, on posera $\lambda = x$. L'équation s'écrit :

$$(67) \quad \frac{d\theta}{dx} = x$$

et l'équation (59), que vérifie C' , devient :

$$(68) \quad \frac{\partial C'}{\partial x} + p \frac{\partial C'}{\partial z} + x \frac{\partial C'}{\partial \theta} = 0$$

C' ne dépendant pas de p , $\frac{\partial C'}{\partial z}$ est aussi nul et C' ne dépend plus que de x, y, θ . On peut alors intégrer l'équation (68) et C' est une fonction arbitraire de y et $\theta - \frac{x^2}{2}$ q restant ici entièrement arbitraire pour les cinq arguments x, y, z, p, θ .

b) λ est une constante absolue : Nous prendrons $\lambda = 1$.

L'équation est :

$$(69) \quad \frac{d\theta}{dx} = 1$$

C' est une fonction arbitraire de y et $\theta - x$, q restant ici aussi entièrement arbitraire.

c) $\lambda = 0$: il y a une intégrale intermédiaire

57.- Cas particulier : λ est fonction de y et p seulement.

L'équation (60) s'intègre immédiatement :

$$C' = -x \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \Psi(p, z - px, \theta - \lambda x, y)$$

où Ψ désigne une fonction arbitraire des arguments indiqués.

q est alors donné par (58) : $q = \frac{\frac{\partial C'}{\partial p}}{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}}$

L'équation proposée conserve toujours la forme (29), où q a la valeur précédente. L'invariant est donné par la formule (61).

58.- Cas particulier : λ est indépendant de y .

L'équation (60) s'écrit :

$$(70) \quad \frac{\partial C'}{\partial x} + p \frac{\partial C'}{\partial z} + \lambda \frac{\partial C'}{\partial \theta} + \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial x} - p \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial z}}{\frac{\partial^2}{\partial p^2}} \frac{\partial C'}{\partial p} = 0$$

Cette équation n'est autre que l'équation d'EULER, relative à la variation de l'intégrale $\int \lambda(x, z, p) dx$, où p est la dérivée $\frac{dz}{dx}$ (puisque y ne figure pas dans λ)

Il suffit de poser :

$$(71) \quad \frac{dp}{dx} = - \frac{\frac{\partial C'}{\partial x} + p \frac{\partial C'}{\partial z} + \lambda \frac{\partial C'}{\partial \theta}}{\frac{\partial C'}{\partial p}}$$

pour obtenir l'équation classique.

Ainsi, à toute équation différentielle du 2d ordre:

$$(72) \quad z'' = \psi(x, z, z')$$

que l'on sait intégrer, on peut faire correspondre un λ et un C' , donc une équation du type cherché et l'invariant correspondant. Le calcul de λ et de C' se réduit d'ailleurs à des quadratures (1).

59.- Cas général.

Le calcul précédent s'étend au cas général, en différenciant l'équation (60) par rapport à θ en posant :

$$(73) \quad C'' = \frac{dC'}{d\theta}$$

On trouve pour C'' l'équation (70) et les conclusions du N° précédent restent valables pour C'' . Une dernière quadrature permet de déduire C' de C'' . En somme, y joue ici le rôle d'un paramètre.

(1) Voir DARBOUX Théorie des surfaces III N°604-5 et notre Note aux C.R. Ac. des Sc. 208, 1939, p.1380-1382.

60.- Critère permettant de reconnaître si une équation linéaire est du type cherché.

Au lieu d'éliminer q entre les équations (58) et (59) nous éliminerons C' . Les relations obtenues entre λ et q nous fourniront le critère cherché.

Dérivant (59) successivement deux fois par rapport à p et tenant compte de (58), nous obtenons :

$$(74) \frac{\partial C'}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial p} \frac{\partial C'}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial y} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

où on a posé :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial x} + p \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial z}}{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}} \frac{\partial}{\partial p}$$

$$\text{et } (75) \frac{\partial C'}{\partial \theta} + \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial \theta} + \frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} \frac{\partial q}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\text{avec : } \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p}$$

Les équations (58), (59), (74), (75) donnent les quatre dérivées de C' par rapport à x, z, p, θ . Les six conditions d'intégrabilité se réduisent à quatre, car la condition x, p se réduit à (74) et la condition z, p à (75).

La condition p, θ s'écrit :

$$(76) \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \text{Log} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0$$

De même, la condition z, θ s'écrit :

$$(77) \frac{\partial M}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial p} \frac{\partial M}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\text{où l'on a posé : } M = \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \text{Log} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial x}$$

Enfin, la condition x, θ s'écrit :

$$(73) \frac{\partial M}{\partial x} + p \frac{\partial M}{\partial z} + \lambda \frac{\partial M}{\partial \theta} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial x} + p \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) = 0$$

Si on tire $\frac{\partial q}{\partial \theta}$ de l'équation (76), on voit que M vérifie l'équation (70) et les conclusions du N°58 sont valables pour M.

La condition x, z , compte tenu des définitions des opérateurs $\frac{\delta}{\delta x}$ et $\frac{\delta}{\delta y}$, se réduit à :

$$(79) \frac{\delta^2 q}{\delta x^2} + \frac{\delta}{\delta y} \frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial x} + p \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial z}}{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}} = 0$$

C'est la condition pour que les opérateurs $\frac{\delta}{\delta x}$ et $\frac{\delta}{\delta y}$ appliquée à une fonction indépendante de θ , soient échangeables.

En définitive, λ et q doivent vérifier les deux conditions suivantes : ils doivent vérifier l'équation (79) et l'expression M, l'équation (70).

61.- Equation $s = f(x, y, z, p, r)$.

Montrons d'abord (1) qu'une telle équation est nécessairement linéaire. En effet, si nous prenons l'invariant sous la forme (16), l'équation (18) s'écrit :

$$(80) \frac{\partial A}{\partial x} + p \frac{\partial A}{\partial z} + p_1 \frac{\partial A}{\partial p} + f \frac{\partial A}{\partial q} = 0$$

En dérivant par rapport à p_1 , on obtient :

$$(81) \frac{\partial A}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial A}{\partial q} = 0$$

ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial p_1}$ ne dépend pas de p_1 et l'équation proposée est nécessairement linéaire.

Pour poursuivre l'étude de ces équations, il est inutile de prendre θ comme variable indépendante au lieu de q , car la condition $\frac{\partial f}{\partial q} = 0$ signifie que θ est linéaire en q :

$$(82) \theta = q + \theta_1(x, y, z, p)$$

(1) Voir GOURSAT Eq. aux Der. Part. du 2d ordre II p.171, mais il s'agit là avec les expressions que nous avons adoptées, de la caractéristique implicite.

et (22) devient :

$$(83) \quad f = \lambda - \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + p \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + p_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial p} \right)$$

L'équation proposée étant linéaire, on peut supposer λ fonction de x, y, z, p seulement (voir N°55) et C fonction de x, y, z, p, q vérifie l'équation (27) qui, développée, s'écrit :

$$(84) \quad \frac{\partial C}{\partial x} + p \frac{\partial C}{\partial z} + p_1 \frac{\partial C}{\partial p} + f \frac{\partial C}{\partial q} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} q \frac{\partial \lambda}{\partial z} + f \frac{\partial \lambda}{\partial p} = 0$$

En différentiant par rapport à q , il vient :

$$(85) \quad \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial q} + p \frac{\partial^2 C}{\partial z \partial q} + p_1 \frac{\partial^2 C}{\partial p \partial q} + f \frac{\partial^2 C}{\partial q^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0$$

où f a sa valeur (83).

En identifiant à zéro cette expression linéaire en p_1 , il vient :

$$(86) \quad \frac{\partial^2 C}{\partial p \partial q} - \frac{\partial \theta_1}{\partial p} \frac{\partial^2 C}{\partial q^2} = 0$$

$$(87) \quad \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial q} + p \frac{\partial^2 C}{\partial z \partial q} + \left(\lambda - \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - p \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 C}{\partial q^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0$$

L'équation (86) s'intègre et donne :

$$(88) \quad \frac{\partial C}{\partial q} = \varphi(x, y, z, \theta), \quad \text{avec } \theta = q + \theta_1$$

L'équation (87) devient alors :

$$(89) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0$$

En la différentiant par rapport à θ , elle devient :

$$(90) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta} + p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \theta} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0$$

où λ ne dépend pas de θ . φ ne doit donc dépendre que des deux arguments y et $\theta + \mu(x, y, z)$, avec :

$$(91) \quad \lambda = \frac{\partial \mu}{\partial x} + p \frac{\partial \mu}{\partial z} = \frac{d\mu}{dx}$$

L'équation proposée, sous la forme (83), devient :

$$\frac{d(\theta - \mu)}{dx} = 0$$

Il y a donc une intégrale intermédiaire :

$$\theta - \mu = F(\beta)$$

ou, en écrivant θ au lieu de $\theta - \mu$, l'équation s'écrit :

$$s = \frac{d\theta}{dx}$$

et l'intégrale intermédiaire :

$$q + \theta_1 = F(\beta)$$

où θ_1 est une fonction de x, y, z, p .

Nous énoncerons donc :

"Si une équation $s = f(x, y, z, p, r)$ ne contient pas la variable q , elle n'admet pas d'invariant du second ordre relatif à la caractéristique explicite. Si elle en admettait un, elle serait linéaire et admettrait une intégrale intermédiaire."

§ 3. Invariant du second ordre relatif à la caractéristique implicite des équations $s = f(x, y, z, p, q, r)$.

62.- D'après la théorie générale, un invariant s'écrira :

$$(92) \quad \varphi(x, y, z, p, p_1, q) = A(x, y, z, p, p_1, q) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + B \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} = F(\alpha)$$

puisque les dérivées de x et de p_1 par rapport à α sont paramétriques.

Cet invariant doit vérifier la condition :

$$(93) \quad \frac{d\varphi}{d\beta} = 0$$

Pour expliciter cette condition, nous utiliserons les équations établies au § 1 qui constituent le système (A).

Le problème se révélant aussitôt comme d'une très grande complexité, nous nous sommes bornés dans ce qui suit, au cas où $B=0$. L'invariant se réduit donc à :

$$(94) \quad \varphi = A \frac{\partial x}{\partial \alpha} = F(\alpha)$$

La condition (93) se développe de la manière suivante :

$$(95) \quad \frac{d\varphi}{d\beta} = - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{dA}{dx} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{dA}{dy} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - A \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \right) = 0$$

Les dérivées $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}$ étant paramétriques, l'équation précédente se décompose en deux autres :

$$(96) \quad A \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} = 0$$

$$(97) \quad = \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dy} - A \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0$$

De l'équation (96) il résulte que l'équation proposée est nécessairement linéaire; nous poserons :

$$(98) \quad s = a(x, y, z, p, q) p_1 + b(x, y, z, p, q).$$

Explicitons maintenant l'équation (97) :

$$(99) - a\left(\frac{\partial A}{\partial x} + p\frac{\partial A}{\partial z} + p_1\frac{\partial A}{\partial p}\right) + \frac{\partial A}{\partial y} + q\frac{\partial A}{\partial z} + (ap_1 + b)\frac{\partial A}{\partial p} + q_1\frac{\partial A}{\partial q} + \\ + \frac{\partial A}{\partial p_1}\left(\frac{da}{dx}p_1 + \frac{db}{dx}\right) - A\frac{da}{dx} = 0$$

Mais l'élément q_1 est paramétrique; l'équation (99) se décompose aussi en deux :

$$(100) \frac{\partial A}{\partial q} = 0$$

$$(101) \frac{\partial A}{\partial y} - a\frac{\partial A}{\partial x} + (q - ap)\frac{\partial A}{\partial z} + b\frac{\partial A}{\partial p} + \frac{\partial A}{\partial p_1}\left(\frac{da}{dx}p_1 + \frac{db}{dx}\right) - A\frac{da}{dx} = 0$$

D'après l'équation (100), A est indépendant de q. Développons l'équation (101) en l'ordonnant par rapport à p_1 :

$$(101') \frac{\partial A}{\partial p_1} \left[\left(\frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q} \right) p_1^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial x} + p \frac{\partial a}{\partial z} + b \frac{\partial a}{\partial q} + a \frac{\partial b}{\partial q} + \frac{\partial b}{\partial p} \right) p_1 + \frac{\partial b}{\partial x} + p \frac{\partial b}{\partial z} + b \frac{\partial b}{\partial q} \right] - \\ - A \left[\left(\frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q} \right) p_1 + \frac{\partial a}{\partial x} + p \frac{\partial a}{\partial z} + b \frac{\partial a}{\partial q} \right] + b \frac{\partial A}{\partial p} + (q - ap) \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial y} - a \frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

où A dépend de x, y, z, p, p_1 et a et b, de x, y, z, p, q .

En vertu de la théorie générale des invariants, on peut affirmer que A est un polynôme en p_1 . Pour préciser le degré de ce polynôme, nous dériverons quatre fois de suite l'équation précédente par rapport à q. Nous obtenons :

$$(102) - \frac{\partial a}{\partial q} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + p \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial q} \frac{\partial A}{\partial p} + \frac{\partial A}{\partial p_1} \left(p_1 \frac{\partial}{\partial q} \frac{da}{dx} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{db}{dx} \right) - \\ - A \frac{\partial}{\partial q} \frac{da}{dx} = 0$$

$$(103) - \frac{\partial^2 a}{\partial q^2} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + p \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 b}{\partial q^2} \frac{\partial A}{\partial p} + \frac{\partial A}{\partial p_1} \left(p_1 \frac{\partial^2}{\partial q^2} \frac{da}{dx} + \frac{\partial^2}{\partial q^2} \frac{db}{dx} \right) - \\ - A \frac{\partial^2}{\partial q^2} \frac{da}{dx} = 0$$

En divisant par $\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}$ supposé différent de zéro,

et en dérivant une troisième fois :

$$(104) \quad \frac{\partial}{\partial q} \frac{\frac{\partial^2 b}{\partial q^2}}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} \frac{\partial A}{\partial p} + \frac{\partial A}{\partial p_1} \left(p_1 \frac{\partial}{\partial q} \frac{\frac{\partial^2 \frac{da}{dx}}{\partial q^2}}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\frac{\partial^2 \frac{db}{dx}}{\partial q^2}}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} \right) -$$

$$- A \frac{\partial}{\partial q} \frac{\frac{\partial^2 \frac{da}{dx}}{\partial q^2}}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} = 0$$

En divisant par $\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial q^2} : \frac{\partial^2 a}{\partial q^2} \right)$ supposé différent de zéro et en dérivant une quatrième fois :

$$(105) \quad \left(p_1 \frac{\partial A}{\partial p_1} - A \right) \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial}{\partial q} \frac{\frac{\partial^2 \frac{da}{dx}}{\partial q^2}}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} : \frac{\partial}{\partial q} \frac{\frac{\partial^2 b}{\partial q^2}}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} \right) +$$

$$+ \frac{\partial A}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial}{\partial q} \frac{\frac{\partial^2 \frac{db}{dx}}{\partial q^2}}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} : \frac{\partial}{\partial q} \frac{\frac{\partial^2 b}{\partial q^2}}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} \right) = 0$$

ce qui est de la forme : (105') $\left(p_1 \frac{\partial A}{\partial p_1} - A \right) M + \frac{\partial A}{\partial p_1} N = 0$

où M est linéaire en p_1 , à condition que $\frac{\partial^2}{\partial p} + a \frac{\partial^2}{\partial q} \neq 0$
et N, à condition que $\frac{\partial^2 b}{\partial p} + a \frac{\partial^2 b}{\partial q} \neq 0$

Si ces deux conditions sont réalisées, A est nécessairement du 1er degré en p_1 . Sinon, dans l'équation (105), le degré du coefficient de M serait supérieur d'une unité à celui du coefficient de N.

Avant de poursuivre l'étude du cas général, nous allons énumérer les cas particuliers que nous avons écartés et dont nous ferons ensuite l'étude.

$$1^{\circ}) \frac{\partial^2 a}{\partial q^2} = 0 ; 2^{\circ}) \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial q^2} : \frac{\partial^2 a}{\partial q^2} \right) = 0 ; 3^{\circ}) \frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q} = 0$$

$$4^{\circ}) \frac{\partial b}{\partial p} + a \frac{\partial b}{\partial q} = 0 ; 5^{\circ}) \frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q} = 0 \text{ et } \frac{\partial b}{\partial p} + a \frac{\partial b}{\partial q} = 0 ;$$

$$6^{\circ}) \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q} \right)}{\partial q^2} : \frac{\partial^2 a}{\partial q^2} \right] = 0$$

63.- Dans le cas général, nous pourrions donc poser :

$$(106) \quad \psi = (A_1 p_1 + B_1) \frac{\partial x}{\partial \alpha}$$

où A_1 et B_1 sont des fonctions de x, y, z, p seulement; ces fonctions vérifient le système déduit de l'équation (101) en égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de p_1 :

$$(107) \quad \frac{\partial A_1}{\partial y} - a \frac{\partial A_1}{\partial x} + (q - ap) \frac{\partial A_1}{\partial z} + b \frac{\partial A_1}{\partial p} + A_1 \left(\frac{\partial b}{\partial p} + a \frac{\partial b}{\partial q} \right) - B_1 \left(\frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q} \right) = 0$$

$$(108) \quad \frac{\partial B_1}{\partial y} - a \frac{\partial B_1}{\partial x} + (q - ap) \frac{\partial B_1}{\partial z} + b \frac{\partial B_1}{\partial p} + A_1 \left(\frac{\partial b}{\partial x} + p \frac{\partial b}{\partial z} + b \frac{\partial b}{\partial q} \right) - B_1 \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \right. \\ \left. + p \frac{\partial a}{\partial z} + b \frac{\partial a}{\partial q} \right) = 0$$

où les inconnues A_1 et B_1 dépendent de x, y, z, p , alors que les coefficients dépendent de x, y, z, p, q .

Sans pouvoir donner la solution complète de ce système, nous allons étudier le cas où a et b , dépendent de p et q seulement et, par suite A_1 et B_1 , de p seul. On obtient alors :

$$(109) \quad b \frac{dA_1}{dp} + A_1 \left(\frac{\partial b}{\partial p} + a \frac{\partial b}{\partial q} \right) - B_1 \left(\frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q} \right) = 0$$

$$(110) \quad \frac{dB_1}{dp} + A_1 \frac{\partial b}{\partial q} - B_1 \frac{\partial a}{\partial q} = 0$$

D'où l'on déduit, en remplaçant dans la 1ère équation

$$A_1 \frac{\partial b}{\partial q} - B_1 \frac{\partial a}{\partial q} \text{ par } - \frac{dB_1}{dp},$$

$$(111) \quad \frac{\partial}{\partial p}(A_1 b - B_1 a) = 0$$

$$\text{ou:} \quad A_1 b - B_1 a = Q$$

Q désignant une fonction de q seul.

D'après (110), on voit que Q' est une constante C_1
donc $Q = C_1 q + C_2$

$$\text{Puis } B_1 = C_1 p + C_3$$

$$\text{D'ailleurs : } A_1 = B_1 \frac{a}{b} + \frac{Q}{b}$$

$$\text{Donc : } \frac{a}{b} = P_1 \text{ et } \frac{Q}{b} = \frac{1}{p}$$

P et P_1 désignant deux fonctions de p seul.

D'où la solution du problème :

$$a = P P_1 (C_1 q + C_2)$$

$$b = P (C_1 q + C_2)$$

$$A_1 = (-C_1 p + C_3) P_1 + \frac{1}{p}$$

$$B_1 = -C_1 p + C_3$$

64.- Cas particulier : a et b linéaires en q.

Remarquons tout de suite qu'il est impossible que l'un des coefficients a ou b soit linéaire, sans que l'autre le soit en même temps. Supposons en effet que a soit seul linéaire en q. D'après l'équation (107), b est exponentiel en q; mais l'équation (108), à cause de la présence du terme $b \frac{\partial b}{\partial q}$, montre que cette hypothèse est inadmissible. Le raisonnement est le même si on suppose b seul linéaire en q. Nous poserons donc :

$$a = a_1 q + a_2$$

$$b = b_1 q + b_2$$

et le système (107), (108) se décompose en quatre équations où les coefficients et les inconnues dépendent des mêmes variables x, y, z, p.

65.- Cas particulier où $\frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q} = 0$ et $\frac{\partial b}{\partial p} + a \frac{\partial b}{\partial q} = 0$

Si $\frac{\partial b}{\partial p} + a \frac{\partial b}{\partial q}$ était seul nul, le premier terme de l'équation (105') serait d'un degré supérieur en p_1 à celui du deuxième terme et l'équation en question n'aurait pas de solution. Ce cas est donc à exclure. Il reste, au contraire, à étudier le cas où $\frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q}$ est seul nul.

Ces préliminaires étant établis, abordons l'étude du cas où ces deux expressions sont simultanément nulles. Ici, Λ est encore linéaire en p_1 et les équations (107), (108) s'écrivent :

$$(112) \quad \frac{\partial \Lambda_1}{\partial y} - a \frac{\partial \Lambda_1}{\partial x} + (q - ap) \frac{\partial \Lambda_1}{\partial z} + b \frac{\partial \Lambda_1}{\partial p} = 0$$

$$(113) \quad \frac{\partial B_1}{\partial y} - a \frac{\partial B_1}{\partial x} + (q - ap) \frac{\partial B_1}{\partial z} + b \frac{\partial B_1}{\partial p} + A_1 \left(\frac{\partial b}{\partial x} + p \frac{\partial b}{\partial z} + b \frac{\partial b}{\partial q} \right) - B_1 \left(\frac{\partial a}{\partial x} + p \frac{\partial a}{\partial z} + b \frac{\partial a}{\partial q} \right) = 0$$

La relation : $\frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q} = 0$ s'intègre et donne :

$$(114) \quad q = ap + \psi(a, x, y, z)$$

où ψ est une fonction arbitraire des arguments indiqués.

Prenons maintenant a comme variable indépendante au lieu de q . La deuxième relation : $\frac{\partial b}{\partial p} + a \frac{\partial b}{\partial q} = 0$ devient simplement :

$$(115) \quad \frac{\partial b}{\partial p} = 0$$

et b est une fonction de x, y, z, a .

L'équation (112) s'intègre: en effet, les coefficients ne doivent pas dépendre de q , donc, après le changement de variable, de a ;

1ère solution : $\frac{\partial \Lambda_1}{\partial y} = 0$, $\psi = a X_1'$, $b = a X_2'$

où X_1 et X_2 sont des fonctions de x seul.

On obtient : $A_1 = \phi(X_1 - z, X_2 + p)$

où ϕ est arbitraire.

L'équation (113) devient alors :

$$(116) \quad \frac{\partial B_1}{\partial y} = 0$$

$$(117) \quad -\frac{\partial B_1}{\partial x} + X_1' \frac{\partial B_1}{\partial z} + X_2' \frac{\partial B_1}{\partial p} + \phi(X_2'' + \frac{X_2'}{p+X_1'}) - B_1(\frac{X_1''}{p+X_1'} + \frac{X_2'}{p+X_1'}) = 0$$

que l'on peut intégrer si on se donne ϕ .

2ème solution : $\frac{\partial A_1}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial A_1}{\partial y} = 0$, $b = \lambda(z, p) \psi$

Dans ces conditions, l'équation (112) se réduit à :

$$(118) \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} + \lambda(z, p) \frac{\partial A_1}{\partial p} = 0$$

C'est l'équation linéaire aux dérivées partielles correspondant à l'équation différentielle du 1er ordre la plus générale. A chaque équation différentielle : $\frac{dp}{dz} = \lambda(z, p)$, que l'on sait intégrer correspond une fonction A_1 . Il s'agit maintenant de déterminer B_1 ; nous supposons que B_1 , comme A_1 , est indépendant de x et y . Alors l'équation (113) s'écrit :

$$(119) \quad \frac{\partial B_1}{\partial z} + \frac{\partial B_1}{\partial p} + A_1 \left[\lambda \left(\frac{\partial \text{Log} \psi}{\partial x} + p \frac{\partial \text{Log} \psi}{\partial z} + \frac{\frac{\partial \psi}{\partial a}}{p + \frac{\partial \psi}{\partial a}} \right) + p \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \right. \\ \left. - B_1 \frac{\frac{\partial \text{Log} \psi}{\partial x} + p \frac{\partial \text{Log} \psi}{\partial z} - \lambda}{p + \frac{\partial \psi}{\partial a}} \right] = 0$$

Pour que les coefficients de cette équation soient indépendants de x, y et a , il est nécessaire que ψ soit exponentiel en x , linéaire en a et indépendant de y . Dans ce cas, l'équation (119) s'intègre en même temps que l'équation (118), puisque c'est la même équation avec second membre.

En résumé, A_1 et B_1 sont des fonctions de z et p obtenues par intégration du système (118), (119), φ étant arbitraire en z , exponentiel en x , linéaire en a et indépendant de y , avec $b = \lambda(z, p) \varphi$, où λ est arbitraire, sous la seule réserve que l'on sache intégrer l'équation différentielle ordinaire : $\frac{dp}{dz} = \lambda(z, p)$

3ème solution : $\frac{\partial A_1}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial A_1}{\partial z} = 0$.

La solution se ramène ici aussi à celle de l'équation différentielle ordinaire du 1er ordre, à condition de poser :

$$b = \lambda(x, p) a,$$

φ restant ici indépendant de y et z et linéaire en a .

4ème solution : $\frac{\partial A_1}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial A_1}{\partial p} = 0$

Même résultat que précédemment, à condition de poser :

$$\varphi = \lambda(x, z) a,$$

$$b = \mu(x, z) a$$

où λ et μ sont des fonctions arbitraires des arguments indiqués.

5ème solution : $\frac{\partial A_1}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial A_1}{\partial p} = 0$

Ici, φ doit être fonction de y et z seulement; on trouve ensuite :

$$b = p \lambda(y, z).$$

6ème solution : $\frac{\partial A_1}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial A_1}{\partial z} = 0$

La solution est ici beaucoup plus particulière que dans les cas précédents : b est fonction de y seul et

$$\varphi = bz$$

66.- Cas particulier : $\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial q^2} : \frac{\partial^2 a}{\partial q^2} \right) = 0$

Cette condition intégrée s'écrit :

$$(120) \quad b = la + mq + n$$

où l, m, n sont des fonctions de x, y, z, p .

En dérivant trois fois l'équation (101) par rapport à q , après division par $\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}$, on obtient :

$$(121) \quad \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial p_1} (p_1 + 1) - \Lambda \right] \left[p_1 \frac{\partial}{\partial q} \frac{\frac{\partial^2}{\partial q^2} \left(\frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q} \right)}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\frac{\partial^2}{\partial q^2} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + p \frac{\partial a}{\partial z} + b \frac{\partial a}{\partial q} \right)}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} \right] = 0$$

Le cas étudié se subdivise donc en deux suivant que l'on annule le premier ou le deuxième crochet.

1ère solution : $\frac{\partial \Lambda}{\partial p_1} (p_1 + 1) - \Lambda = 0$

Cette condition s'intègre :

$$(122) \quad \Lambda = \Lambda_1(x, y, z, p) (p_1 + 1)$$

En identifiant à zéro l'équation (101), dans laquelle b a la valeur (120) et Λ , la valeur (122), il vient :

$$(123) \quad a \left(m + \frac{\partial l}{\partial p} + 1 \right) \frac{\partial \text{Log } \Lambda_1}{\partial p} - \frac{\partial \text{Log } \Lambda_1}{\partial x} - p \frac{\partial \text{Log } \Lambda_1}{\partial z} + q \left(\frac{\partial m}{\partial p} + \frac{\partial n}{\partial p} + \right.$$

$$\left. + (mq + n) \frac{\partial \text{Log } \Lambda_1}{\partial p} + \frac{\partial \text{Log } \Lambda_1}{\partial y} + q \frac{\partial \text{Log } \Lambda_1}{\partial z} \right) = 0$$

$$(124) \quad la \left(m + \frac{\partial l}{\partial p} + 1 \right) \frac{\partial \text{Log } \Lambda_1}{\partial p} - \frac{\partial \text{Log } \Lambda_1}{\partial x} - p \frac{\partial \text{Log } \Lambda_1}{\partial z} + q \left(\frac{\partial m}{\partial x} + p \frac{\partial m}{\partial z} \right) + \frac{\partial n}{\partial x} +$$

$$+ p \frac{\partial n}{\partial z} + (mq + n) \left(m + \frac{\partial l}{\partial p} + 1 \right) \frac{\partial \text{Log } \Lambda_1}{\partial p} + 1 \left(\frac{\partial \text{Log } \Lambda_1}{\partial y} + q \frac{\partial \text{Log } \Lambda_1}{\partial z} \right) +$$

$$+ \frac{\partial l}{\partial y} + q \frac{\partial l}{\partial z} = 0$$

Dans les deux équations précédentes, seul a dépend de q et on suppose essentiellement qu'il n'en dépend pas linéairement. Or ces équations sont linéaires en a et q . Il en résulte donc une double identification en a et q . D'où le système :

$$(125) \quad m + \frac{\partial l}{\partial p} + l \frac{\partial \log \Lambda_1}{\partial p} - \frac{\partial \log \Lambda_1}{\partial x} - p \frac{\partial \log \Lambda_1}{\partial z} = 0$$

$$(126) \quad \frac{\partial m}{\partial p} + m \frac{\partial \log \Lambda_1}{\partial p} + \frac{\partial \log \Lambda_1}{\partial z} = 0$$

$$(127) \quad \frac{\partial n}{\partial p} + n \frac{\partial \log \Lambda_1}{\partial p} + \frac{\partial \log \Lambda_1}{\partial y} = 0$$

$$(128) \quad \frac{\partial m}{\partial x} + p \frac{\partial m}{\partial z} + m \left(m + \frac{\partial l}{\partial p} + l \frac{\partial \log \Lambda_1}{\partial p} \right) + l \frac{\partial \log \Lambda_1}{\partial z} + \frac{\partial l}{\partial z} = 0$$

$$(129) \quad \frac{\partial n}{\partial x} + p \frac{\partial n}{\partial z} + n \left(m + \frac{\partial l}{\partial p} + l \frac{\partial \log \Lambda_1}{\partial p} \right) + q \frac{\partial \log \Lambda_1}{\partial y} + \frac{\partial l}{\partial y} = 0$$

que l'on peut écrire sous la forme équivalente :

$$(130) \quad \frac{\partial \Lambda_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial p} \left[(1+mp) \Lambda_1 \right]$$

$$(131) \quad \frac{\partial \Lambda_1}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial p} (n \Lambda_1)$$

$$(132) \quad \frac{\partial \Lambda_1}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial p} (m \Lambda_1)$$

$$(133) \quad \frac{\partial m}{\partial x} + p \frac{\partial m}{\partial z} + m^2 + m \frac{\partial l}{\partial p} - l \frac{\partial m}{\partial p} + \frac{\partial l}{\partial z} = 0$$

$$(134) \quad \frac{\partial n}{\partial x} + p \frac{\partial n}{\partial z} + mn + n \frac{\partial l}{\partial p} - l \frac{\partial n}{\partial p} + \frac{\partial l}{\partial y} = 0$$

Les équations (130), (131), (132) définissent Λ_1 .
Les conditions d'intégrabilité de Λ_1 sont précisément les équations (133) (134) et :

$$(135) \quad \frac{\partial m}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial z} + n \frac{\partial m}{\partial p} - m \frac{\partial n}{\partial p} = 0$$

Le système (133), (134) où l est l'inconnue, conduit précisément à la condition d'intégrabilité (135).
D'où la solution : On choisit deux fonctions m et n des quatre variables x, y, z, p qui vérifient l'équation (135); puis l est déterminé par le système (133), (134). Enfin Λ_1 est obtenu par la résolution du système (130), (131), (132). L'équation proposée est alors :

$$s = a(p_1+1) + mq + n$$

et l'invariant :

$$\phi = A_1(p_1+1) \frac{\partial x}{\partial \alpha} = F(\alpha)$$

Il est facile de trouver des solutions assez générales de l'équation (135). Soit M une fonction de x, y, z, p.

Nous poserons :

$$m = \frac{\partial M}{\partial z} \quad n = \frac{\partial M}{\partial y}$$

M devra vérifier la condition : $\frac{\partial M}{\partial p} = \psi(M, x, p)$

où ψ est une fonction arbitraire des arguments indiqués.

Exemple : $m = e^p$, $n = e^p$

On en déduit : $1 = -p e^p$

$$\text{puis} : A_1 = e^{-p} \psi(y+z+e^{-p})$$

ψ étant une fonction arbitraire de l'argument indiqué.

2ème solution : Le deuxième crochet de l'équation (121) doit être nul, quel que soit p_1 . On obtient donc les deux conditions :

$$(136) \frac{\frac{\partial^2}{\partial q^2} \left(\frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q} \right)}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} = 0$$

$$(137) \frac{\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + p \frac{\partial a}{\partial z} + (1a+mq+n) \frac{\partial a}{\partial q} \right) \right)}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} = 0$$

En intégrant ces deux relations :

$$(138) \frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q} = \lambda a + \mu q + \nu$$

$$(139) \frac{\partial a}{\partial x} + p \frac{\partial a}{\partial z} + (1a+mq+n) \frac{\partial a}{\partial q} = \rho a + \sigma q + \tau$$

$\lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau$, étant des fonctions arbitraires de x, y, z, p.

En tirant a $\frac{\partial a}{\partial q}$ de (138) et le portant dans (139) et en ajoutant à a une expression linéaire convenablement choisie par rapport à q, il vient :

$$(140) \quad \frac{\partial a}{\partial x} + p \frac{\partial a}{\partial z} - 1 \frac{\partial a}{\partial p} + (mq+n) \frac{\partial a}{\partial q} = 0$$

Reprenant l'équation (101) où on remplace b par sa valeur (120), $\frac{\partial a}{\partial p} + \frac{\partial a}{\partial q}$ par sa valeur (138) et $\frac{\partial a}{\partial x} + p \frac{\partial a}{\partial z} + b \frac{\partial a}{\partial q}$ par sa valeur (139) et en opérant, comme plus haut, la double identification à zéro par rapport à a et q, on obtient :

$$(141) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial p_1} \left[\lambda p_1^2 + (1\lambda + m \frac{\partial \lambda}{\partial p}) p_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x} + p \frac{\partial \lambda}{\partial z} + 1m \right] - \Lambda p_1 + 1 \frac{\partial \Lambda}{\partial p} - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + p \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \right) = 0$$

$$(142) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial p_1} \left[\mu p_1^2 + (1\mu + \frac{\partial \mu}{\partial p}) p_1 + \frac{\partial \mu}{\partial x} + p \frac{\partial \mu}{\partial z} + n^2 \right] - \Lambda p_1 + n \frac{\partial \Lambda}{\partial p} + \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0$$

$$(143) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial p_1} \left[\nu p_1^2 + (1\nu + \frac{\partial \nu}{\partial p}) p_1 + \frac{\partial \nu}{\partial x} + p \frac{\partial \nu}{\partial z} + rm \right] - \Lambda p_1 + n \frac{\partial \Lambda}{\partial p} + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0$$

où la fonction inconnue Λ dépend seule de p_1 .

Comme on l'a vu plus haut, de la forme de ces équations, on peut conclure que Λ est linéaire en p_1 . Nous poserons :

$$(144) \quad \Lambda = A_1 p_1 + B_1$$

et les trois équations précédentes se décomposeront chacune en deux :

$$(145) \frac{\partial A_1}{\partial x} + p \frac{\partial A_1}{\partial z} - l \frac{\partial A_1}{\partial p} - A_1 (1\lambda + m \frac{\partial l}{\partial p}) + B_1 \lambda = 0$$

$$(146) \frac{\partial A_1}{\partial z} + m \frac{\partial A_1}{\partial p} + A_1 (1\lambda + \frac{\partial m}{\partial p}) - B_1 \lambda = 0$$

$$(147) \frac{\partial A_1}{\partial y} + n \frac{\partial A_1}{\partial p} - A_1 (1\gamma + \frac{\partial n}{\partial p}) - B_1 \gamma = 0$$

$$(148) \frac{\partial B_1}{\partial x} + p \frac{\partial B_1}{\partial z} - l \frac{\partial B_1}{\partial p} - A_1 (\frac{\partial l}{\partial x} + p \frac{\partial l}{\partial z} + lm + 1\rho) + B_1 \rho = 0$$

$$(149) \frac{\partial B_1}{\partial z} + m \frac{\partial B_1}{\partial p} + A_1 (\frac{\partial m}{\partial x} + p \frac{\partial m}{\partial z} + m^2 + 1\sigma) - B_1 \sigma = 0$$

$$(150) \frac{\partial B_1}{\partial y} + n \frac{\partial B_1}{\partial p} + A_1 (\frac{\partial n}{\partial x} + p \frac{\partial n}{\partial z} + nm + 1\tau) - B_1 \tau = 0$$

L'étude générale de ce système semble très difficile et nous ne sommes pas parvenus à la mener à bien. Il est clair toutefois, que les conditions d'intégrabilité qui interviennent pour former un système complet, nous fourniront des conditions que doivent vérifier les fonctions, qui, jusque là, étaient arbitraires. Ensuite a devra vérifier l'équation (140).

Pour mieux nous rendre compte des particularités de la question, nous allons étudier le cas particulier très simple où toutes les fonctions ne dépendent que de la seule variable p. Les trois dernières équations montrent que ρ, σ, τ sont proportionnels à l, m, n respectivement. En désignant les dérivées par des accents, les trois premières s'écrivent :

$$lA_1' + (l' + m)A_1 + \lambda (A_1 l - B_1) = 0$$

$$mA_1' + m'A_1 + \lambda (A_1 l - B_1) = 0$$

$$nA_1' + n'A_1 + \gamma (A_1 l - B_1) = 0$$

Nous pouvons considérer que nous avons affaire à un système linéaire et homogène, dont les inconnues sont: $\Lambda_1, \Lambda'_1, \Lambda_1 l - B_1$.

Il faudra donc :

1°) que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & l'+m & \lambda \\ n & m' & \mu \\ n & n' & v \end{vmatrix} = 0$$

2°) que les valeurs de Λ_1 et de Λ'_1 déduites de la résolution du système, la condition précédente étant supposée réalisée, soient telles que la valeur de Λ'_1 soit la dérivée de celle de Λ_1 . On déduira la valeur de B_1 de celle de Λ_1 . On déduira la valeur de B_1 de celle de $\Lambda_1 l - B_1$, calculée d'après la résolution du même système. a sera donné par l'intégration de l'équation (140).

